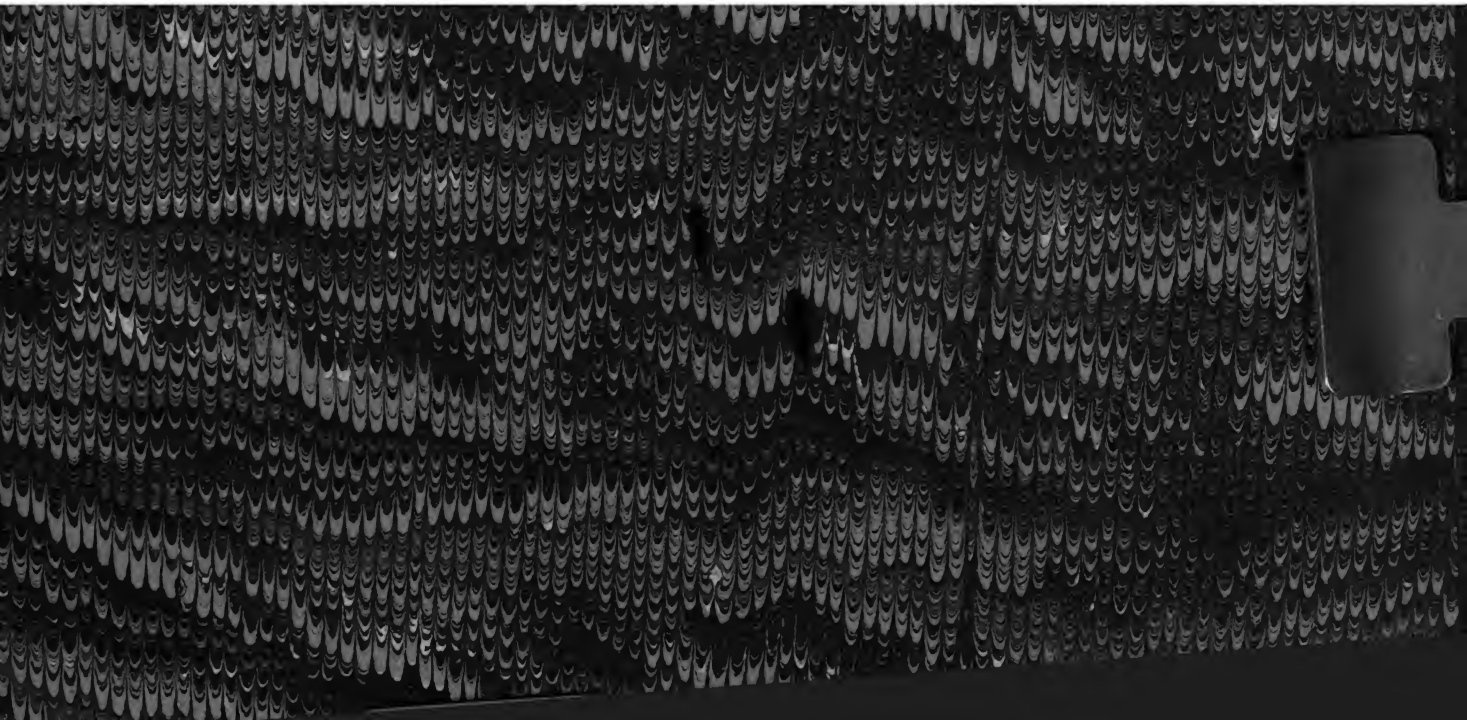
CONSTRUIRENDE GEOMETRIE ZUR PRAKTISCHEN ANWENDUNG GEOMETRISCHER RAUMGRÖSSEN...

Gotthelf August FISCHER

Digitized by Google

Google



8532. bb. 29.

Digitized by Google

Construirende

Geometrie.

Digitized by Google

Digitized by Google

Construirende Geometrie

zur

practischen Anwendung geometrischer Raumgrößen ohne ausführliche Beweise

für

angehende Künstler, Baugewerken, Zeugarbeiter

ꝛc. ꝛc.

so wie

als Handbuch zum Gebrauche in Bürger- und Industrie-Schulen

entworfen

von

G. A. Fischer, K.

Professor der Mathematik bei dem Königl. Sächs. Cadetten-Corps und der mit der Kunst-Academie verbundenen Bauschule.

Mit 13 Kupfertafeln.

Leipzig, 1825.

Bei Leopold Voß.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorwort.

Angehenden Künstlern und Gewerken fehlt es oft an Gelegenheit, einen vollständigen, auf Analytik gegründeten, Unterricht der Elementar-Geometrie zu genießen. In diesem Falle dürfte für selbige eine der Stufe ihrer Vorkenntnisse entsprechende Anleitung zu Entwerfung geometrischer Figuren; Verwandlung und Theilung der Raumgrößen; Zeichnung ähnlicher Flächen, nach gegebenen Verhältnissen; Construirung verschiedener regulärer krummer Linien, nebst Anwendung derselben auf technische Gegenstände — gewiß nicht ohne Nutzen seyn.

Der Verfasser hat sich bestrebt, die zu diesem Zweck gehörigen geometrischen Lehrsätze angemessen zu ordnen, und mit steter Rücksicht auf den angenommenen Grad der Vorkenntnisse genannter Personen,

Digitized by Google

die erklärenden Conſtruktionen zu wählen und möglichſt deutlich vorzutragen.

Geübtere, welche von einigen Lehrſätzen ſtrengere Beweiſe wünſchen, finden letztere, mittelſt der durch eckige Klammern beſonders bezeichneten Paragraphen, in dem vom Verfaſſer herausgegebenen Lehrbuche der Geometrie.

Außerdem würde vielleicht auch der erſte Abſchnitt vorliegender Schrift in Bürger- und Induſtrie-Schulen als Anleitung im Gebrauche geometriſcher Werkzeuge nützlich ſeyn, und als Hülfsmittel dienen, Fertigkeit im Entwerfen und Proportioniren geometriſcher Figuren, durch Anwendung des verjüngten Maßſtabes zu erlangen.

Digitized by Google

Inhalts-Anzeige.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

Von den Linien im Allgemeinen. . . . . Seite 1
Von Vergleichung gerader Linien in Hinsicht ihrer Länge. " 2
Betrachtung der Richtung zweier neben einander liegenden Linien ohne Berührung. . . . . " 3
Entstehung und Eintheilung der Winkel. . . . . " 4
Benennungen der in und um einen Kreis vorkommenden Punkte, Linien und Winkel. . . . . " 5
Von Eintheilung des Kreises in Gradmaß und dessen Anwendung zu Vergleichung und Ausmessung der Winkel. " 7
Von den Dreiecken. . . . . " 9
Von der Aehnlichgleichheit der Dreiecke. . . . . " 11
Lehrsätze ohne weitere Beweise, welche sich auf die Winkel der Dreiecke beziehen und wovon man sich durch Ausmessung und Auftragung überzeugen kann. . . . . " 13
Von den Eigenschaften der Parallellinien. . . . . " 17
Construction von Parallellinien unter gewissen Bedingungen. . . . . " 18
Von Construction vierseitiger Figuren. . . . . " 21
Von den Vielecken oder Polygonen, so wie der Construction regulärer Polygone aus den gegebenen Seiten und im Kreise von gegebenen Halbmessern. . . . . " 27
Von Verwandlung der Figuren durch Construction in andere ihnen an Flächeninhalt völlig gleiche. . . . . " 34
Einige der vorzüglichsten Constructionen den Kreis und die ihm zugehörigen Winkel betreffend. . . . . " 45
Von dem Proportional-Zirkel. . . . . " 50
Von Eintheilung der Maßstäbe. . . . . " 54
Von der Aehnlichkeit der Dreiecke und den vorzüglichsten Eigenschaften derselben. . . . . " 57

Digitized by Google

Von Theilung der Flächen durch Construction.

I) Theilung der Dreiecke. . . . . Seite 69
II) Theilung der Parallelogramme. . . . . " 76
III) Theilung der Trapeze. . . . . " 78
IV) Theilung des Kreises durch concentrische Kreise. . . . . " 82

Zweiter Abschnitt.

Construction verschiedener krummer Linien.

Von den Kegelschnitten. . . . . Seite 83
Von der Ellipse. . . . . " 84
Von Construction der Ellipse. . . . . " 85
Construction der sogenannten Ovale oder Linsenlinien. . " 86
Von der Parabel. . . . . " 89
Von der Hyperbel. . . . . " 93
Von den Cykloiden. . . . . " 94
Von den Spirallinien. . . . . " 100
Von den Voluten oder sogenannten Schneckenlinien. . . " 103
Von der Evolvente oder Abwickelungslinie. . . . . " 105
Von der Kettenlinie. . . . . " 106
Anwendungen der Cykloide, Epicykloide, Abwickelungs- und archimedischen Spirallinie, zur vortheilhaftesten Bildung der Zähne, Hebedaumen und Stäbe bei Räderwerken. . . . . " 115
Von Stampfern und der Construction ihrer Hebezapfen. . " 126
Anhang einiger Aufgaben, welche im Fache der Tischler, Fournirer und anderer Gewerken vorkommen können. . " 132

Verbesserungen.

Seite	Zeile	statt	lese man
33	5 und 6 v. u.	d	c
71	6 u. 13 v. o.	h	k
77	2 v. u.	c	g
82	8 v. u.	y	g
85	13 v. u.	+ ab	+ 2 ab
92	13 v. o.	Subtangente	Subnormale.
93	6 v. o.		

1 JY 61

Digitized by Google

Erster Abschnitt.

Einleitung.

§. 1.

Die Geometrie ist die Wissenschaft der ausgedehnten Größen, das heißt solcher, die einen Raum einnehmen. Dieselben sind:

1) Linien, welche nur eine Ausdehnung der Länge haben.

2) Flächen, die zwei Ausdehnungen in sich enthalten, nämlich die der Länge und Breite.

3) Körper, welche drei verschiedene Ausdehnungen, Länge, Breite und Dicke (oder Höhe) in sich vereinigen.

Von den Linien im Allgemeinen.

§. 2.

Die Linien werden hauptsächlich in gerade und krumme eingetheilt.

Gerade heißen sie, wenn sämmtliche Punkte der Linie eine und dieselbe Richtung haben, wie ab in Fig. 1.

Krumm werden Linien genannt, wenn jeder Punkt eine andere Richtung annimmt. Letztere heißen regulär, wenn die Richtungen der Punkte sich nach einem gewissen Gesetze verändern, wie z. B. bei dem Kreise Fig. 2., in dem alle Punkte seines Umfanges von einem innerhalb desselben enthaltenen Punkte gleichweit entfernt sind.

Außer dem Kreise gibt es noch mehrere reguläre krumme Linien, z. B. die Ellipse, Parabel, Hyperbel; ferner die Spiral- und Muschellinien; die Cycloide, Epicycloide, Hypocycloide; die Abwickelungs- und Kettenlinie,

die logistische, loxodromische und elastische Linie ꝛc., wovon die Constructionen der vorzüglichsten hierher gehörigen in der Folge gezeigt werden sollen.

Irregulär werden krumme Linien genennt, wenn bei Veränderung der Richtung ihrer Punkte kein allgemeines Gesetz Statt findet, nnd dieselben nur durch Annäherung bestimmt und construirt werden können, wie Fig. 3.

Von Vergleichung gerader Linien in Hinsicht ihrer Länge.

§. 3.

Die Vergleichung gerader Linien kann auf zweierlei Art bewerkstelliget werden:

1) Indem man die kürzeste derselben zur Einheit annimmt, und mittelst des Zirkels untersucht, wie viel Mal dieselbe in der größeren enthalten ist. Wird letztere vollkommen genau durch die zur Einheit angenommene ausgemessen, so ist das Verhältniß beider bestimmt; sollte hingegen ein Theil der größern Linie übrig bleiben, so wird derselbe gegen die, vorher zur Einheit angenommenen, auf gleiche Weise verglichen, und mit Vergleichung der übriggebliebenen Theile gegen die auszumessenden so lange fortgefahren, bis endlich ein Theil die zuletzt gebrauchte Einheit genau ausmißt. Einfacher und bequemer ist folgende Vergleichungsweise:

Man nimmt außer den zu vergleichenden Linien noch eine besondere Länge zur Einheit an, welche sodann ein Maßstab genennt wird; theilt selbige in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (gewöhnlich von 10 zu 10, oder 12 zu 12), und vergleicht mit Hülfe des Zirkels die gegebenen Linien gegen die Theile des Maßstabes. In Fig. 4. sey ab von 10 zu 10 Theilen eingetheilt, und cd, ef, und gh gegen einander zu vergleichen gegeben.

Bei dieser Ausmessung mit dem Zirkel sieht man in

Digitized by Google

Fig. 4., daß cd = 43 Theile
ef = 31 „
gh = 22 „ beträgt; folglich verhalten sich diese Linien wie 43 : 31 : 22 gegen einander.

In der Geometrie wird die zur Einheit angenommene Länge ein Fuß genennt und mit 1′ bezeichnet. Mehrere Fuße zu einer Einheit verbunden, erhalten die Benennung Ruthe (1°). Die fernern Eintheilungen des Fußes in kleinere Theile heißen Zolle (1″) und die Theile eines Zolles, Linien (1‴).

Im gemeinen Leben sind gewöhnlich dreierlei Maße, nämlich Land-, Decimal- und Duodecimalmaß eingeführt, wovon zwei Landfuße eine Elle ausmachen. Im Königreiche Sachsen enthält eine Landruthe 7 Ellen 14 Zoll, die Elle zu 24 Zoll gerechnet; folglich beträgt der Landfuß 12 Zoll. Eine Landruthe enthält demnach 15$\frac{1}{2}$ Land- oder Werkfuße.

Theilt man die Länge einer Landruthe von 10 zu 10 gleichen Theilen ein, so heißt solches Decimalmaß. Ein Decimalfuß beträgt demnach 18$\frac{1}{2}$ Ellenzolle. Geschiehet hingegen die Eintheilung obiger Länge von 12 zu 12, so wird es Duodecimalmaß genennt. Ein Duodecimalfuß enthält folglich 15$\frac{3}{5}$ Ellenzolle.

Betrachtung der Richtung zweier neben einander liegenden Linien ohne Berührung.

§. 4.

Hierbei wird angenommen, daß die neben einander liegenden Linien sich in einer und derselben Ebene befinden. Eine Ebene ist aber eine Fläche von der Beschaffenheit, daß wenn auf selbige eine gerade Linie unter allen denkbaren Richtungen gelegt wird, solche mit ihren sämmtlichen Punkten in erstere zu liegen kommt.

Behalten die nebeneinander liegenden Linien in allen

Digitized by Google

Punkten gleiche Entfernung, so werden sie **Parallel-Linien**, wie ab und cd Fig. 5., außerdem **convergirende** oder **divergirende** Linien genennt, je nachdem man sich dieselben annähernd, wie ef und gh Fig. 6., oder auseinandergehend, nach der Richtung fe und hg betrachtet.

Entstehung und Eintheilung der Winkel.

§. 5.

Wenn zwei convergirende Linien so weit verlängert werden, bis sie sich in ihren Endpunkten berühren, so entstehet ein Winkel, wie abc Fig. 7. Die beiden Linien ab und bc, welche den Winkel bilden, werden die **Schenkel** und der Berührungspunkt b, der Scheitelpunkt oder die **Spitze** des Winkels abc genennt.

Anmerkung. Bei Benennung der Winkel durch drei Buchstaben wird allezeit der am Scheitelpunkte stehende in die Mitte genommen, also der Winkel Fig. 7. durch abc oder cba bezeichnet; außerdem kann derselbe auch durch einen inner- oder außerhalb der Schenkel-Oeffnung des Winkels geschriebenen Buchstaben (z. B. hier durch x oder b) angedeutet werden.

§. 6.

Es gibt rechte, spitze und stumpfe Winkel.

Ein rechter Winkel ist derjenige, dessen Schenkel ab Fig. 8., zum andern Schenkel bc, eben so viel Neigung, als zu dessen Verlängerung bd hat; ab wird sodann eine **Perpendiculare** oder **Normale** auf bc genennt.

Ein spitzer Winkel heißt derselbe, wenn die Neigung des einen Schenkels de Fig. 9. zu dem andern ef größer, als zu dessen Verlängerung eg ist.

Ein stumpfer Winkel wird er genennt, wenn der Schenkel hi Fig. 10. mehr Neigung zu der Verlängerung li als zu dem andern Schenkel ik hat.

Digitized by Google

§. 7.

Wenn eine Linie nm Fig. 11. eine andere lo, zwischen ihren Endpunkten berührt, so entstehen zwei Winkel x und y, welche **Nebenwinkel** genennt werden. Aus Fig. 11. ist zu ersehen, daß die beiden Nebenwinkel lmn und nmo so groß als die beiden rechten Winkel lmp und pmo sind [§. 17.].

Anmerkung. Die ausführlichen Beweise der hier angeführten Lehrsätze sind in meinen Anfangsgründen der Geometrie nachzulesen, wovon die aufzusuchenden Ziffern in eckige Klammern eingeschlossen worden sind.

§. 8.

Durchschneiden sich zwei gerade Linien ab und cd Fig. 12., so entstehen vier Winkel u, o, x und y. Die gegenüberliegenden Winkel, wie u und x, o und y werden **Vertikal-** oder **Scheitelwinkel** genennt. Dieselben sind einander gleich, weil sich die Richtungen ihrer Schenkel nicht verändern [§. 17.].

§. 9.

Zwei Winkel, die einen Schenkel gemein haben, sich aber nach entgegengesetzten Richtungen öffnen, wie abc und bcd Fig. 13., heißen **Wechselwinkel**.

Benennungen der in und um einen Kreis vorkommenden Punkte, Linien und Winkel.

§. 10.

Der Umfang des Kreises aehfblmn erhält den Namen **Peripherie, Circumferenz**.

Der Punkt c Fig. 14., welcher von allen Punkten der Peripherie des Kreises gleichweit entfernt ist, heißt der **Mittelpunkt** oder das **Centrum** des Kreises.

Jede Linie vom Mittelpunkt c bis an die Peripherie gezogen, wie ca, ce, cb, wird der **Halbmesser** oder **Radius** genennt.

Digitized by Google

Eine Linie wie ab von einem Punkt der Peripherie zum andern und zugleich durch den Mittelpunkt c gezogen, heißt ein Diameter oder Durchmesser.

Die Lienie ad, welche den Kreis im Punkte a berührt, ohne die Peripherie zu schneiden, wird Berührungslinie oder Tangente, so wie a der Berührungspunkt genennt.

Eine Linie cd vom Mittelpunkte c bis an die Tangente gezogen, heißt Durchschnittslinie oder Secante und c der Durchschnittspunkt.

Jede Linie wie ef im Kreise, die nicht durch den Mittelpunkt desselben geht: Sehne oder Chorde.

Eine Linie gh auf die Mitte der Sehne ef bis an die Peripheri perpendicular errichtet, heißt Pfeil oder Sagitta.

Ein Theil der Peripherie, wie ae, wird Bogen oder Arcus, und

der Winkel ace, dessen Scheitelpunkt im Mittelpunkte c liegt, ein Winkel am Mittelpunkte oder Centriwinkel genennt.

Befindet sich der Scheitelpunkt des Winkels in der Peripherie, wie bei dem Winkel bal, so heißt er ein Peripherie-Winkel.

Liegt der Scheitelpunkt des Winkels außerhalb der Peripherie, wie bei akn, so ist es ein Winkel außerhalb der Peripherie, und der Winkel fib, wegen seines in der Kreisfläche liegenden Scheitelpunktes, ein Winkel innerhalb der Peripherie.

Der Theil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und einem Bogen begrenzt wird, wie aeca, heißt ein Ausschnitt oder Sector, und

der von einem Bogen und der Chorde eingeschlossene Theil, wie ehfe, ein Abschnitt oder Segment.

Mehrere Kreise aus einem und demselben Mittelpunkte mit verschiedenen Radien beschrieben, werden concentrische, hingegen solche, die nicht aus einerlei Mittel-

Digitized by Google

punkte beschrieben worden sind, excentrische Kreise genennt.

Von Eintheilung des Kreises in Grad-maß, und dessen Anwendung zu Vergleichung und Ausmessung der Winkel.

§. 11.

Winkel können in Hinsicht ihrer Neigungen gegen einander verglichen werden, indem man mit einerlei Halbmesser, Bogen zwischen ihre Schenkel beschreibt. Um daher diese Bogen gegen einander vergleichen zu können, war es nöthig, den Kreis in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen. Man wählte hierzu die Zahl 360, weil in ihr viele Zahlen [nach (3) §. 22. der Zahlenrechnung 23] ohne Rest aufgehen, und nannte jeden solchen Theil einen Grad (1°). Zur nähern Vergleichung wurde der Grad in 60 Minuten (60′) und jede Minute in 60 Secunden (60″) ꝛc. eingetheilt. Je größer oder kleiner daher ein Kreis ist, desto größer oder kleiner sind auch die Grade desselben. Durch das Gradmaß ist demnach nur die Größe der Bogen verhältnißmäßig anzugeben.

Der ganze Kreis enthält demnach 360°, folglich der halbe Kreis 180° und der Virtelskreis 90°. Weil nun zwei sich rechtwinklig schneidende Durchmesser den Kreis in vier Quadranten theilen, so ist das Maß eines rechten Winkels 90°, eines spitzen Winkels weniger, und eines stumpfen Winkels mehr als 90°.

§. 12.

Will man daher Winkel in Hinsicht ihrer Größe gegen einander vergleichen, so beschreibe man aus den Spitzen derselben mit willkührlichem Halbmesser, Bogen zwischen ihre Schenkel, und bemerke die Anzahl Grade und Minuten, welche diesen Bogen nach §. 11. zukommen.

Zur Erleichterung dieser Ausmessung bedient man sich

Digitized by Google

eines sogenannten (aus Horn, Elfenbein oder Messing gefertigten) Transporteurs, d. i. eines in ganze und halbe Grade eingetheilten Halbkreises Fig. 15. Bei Messung der Winkel legt man seinen Durchmesser an den einen Schenkel bc, so, daß dessen Centrum an den Scheitelpunkt des Winkels zu liegen kommt, und zählt die von dem Schenkel ab abgeschnittenen Grade und Minuten. Letztere werden gemeiniglich nach dem Augenmaße geschätzt.

1ste Aufgabe.

Der Winkel x soll an den Punkt a der Linie ab angetragen werden Fig. 16.

Auflösung.

Solches ist auf zweierlei Art zu bewerkstelligen.

1. Mittelst des Transporteurs.

Der Transporteur wird mit seinem Mittelpunkte auf gleiche Weise, wie in Fig. 15. an den Scheitelpunkt m, so wie sein Durchmesser an den Schenkel mc Fig. 16. gelegt, und das Gradmaß des Bogens cd gezählt. Hierauf wird der Transporteur an den Punkt a und die Linie ab gebracht, und das abgezählte Gradmaß mit einem feinen Punkte bei f bemerkt, wo mittelst des gezogenen Schenkels ah, der Winkel hab dem Winkel dmc gleich gemacht wird.

2. Durch Construction.

Man setze den Zirkel in m ein, und beschreibe mit einem beliebigen Halbmesser den Bogen cd zwischen den Schenkeln des Winkels. Mit derselben Oeffnung ziehe man aus a den unbestimmten Bogen eg; mache die Chorde fe der Chorde cd gleich, und ziehe durch a und f den Schenkel ah, so ist der Winkel hab = dem Winkel dmc, weil die Schenkel einander decken, wenn man sie und die Scheitelpunkte gehörig aufeinander legt [§. 18. 1ste Aufgabe.].

Zusatz. Ein rechter Winkel wird gewöhnlich mittelst

eines materiellen aus Holz oder Elfenbein gefertigten rechten Winkels construirt.

Von den Dreiecken.

§. 13.

Zur Einschließung eines Flächenraums durch gerade Linien, sind zum wenigsten drei Linien von der Beschaffenheit erforderlich, daß die Summe zweier dieser Linien größer als die dritte ist. Die Figur, die daraus entsteht, heißt ein Dreieck oder Triangel.

Dreiecke werden hauptsächlich nach ihren Seiten und Winkeln eingetheilt.

Nach ihren Seitenlinien betrachtet, gibt es:

1) Gleichseitige Dreiecke, in welchen die drei Seitenlinien einander gleich sind, wie Fig. 17.

2te Aufgabe.

Es soll mittelst einer gegebenen Seitenlinie a′b′ Fig. 17. ein gleichseitiges Dreieck construirt werden.

Auflösung.

Die Linie ac (als die Grundlinie des Dreiecks) wird a′b′ gleich gemacht; mit derselben aus a und c, die Bogen op und mn beschrieben, daß sie sich in b schneiden, und b, mit a und c, durch Linien verbunden.

2) Gleichschenkliche Dreiecke, worin nur zwei Seitenlinien einander gleich sind, wie Fig. 18.

3te Aufgabe.

Ein gleichschenkliches Dreieck, mittelst zweier an Größe verschiedenen Linien a′c′ und a′b′ Fig. 18. zu beschreiben, wenn a′c′ die Grundlinie bezeichnet.

Auflösung.

Nachdem ac = a′c′ gemacht worden, beschreibe man

mit a'b' aus a und c zwei Bogen, die sich in b schneiden und verbinde b, mit a und c, durch Linien.

Zusatz. Ein von jenem an Form und Raum verschiedenes gleichschenkliches Dreieck würde entstanden seyn, wenn a'b' zur Grundlinie, und a'c' zur Seitenlinie angenommen worden wäre, wie Fig. 19. zeigt. Zugleich ersiehet man hieraus, daß die Verzeichnung eines gleichschenklichen Dreiecks, mittelst zweier gegebenen Linien, nur unter der Bedingung möglich wird, daß die kleinste zur Seitenlinie bestimmte, doppelt genommen, größer als die andere gegebene ist.

3) In ungleichseitige Dreiecke, bei welchen die drei Seitenlinien verschieden sind, wie Fig. 20.

4te Aufgabe.

Mit den drei Linien a'b', b'c' und a'c' soll ein ungleichseitiges Dreieck beschrieben werden Fig. 20.

Auflösung.

Der Linie ab gebe man die Länge a'b'; beschreibe aus a mit a'c' den Bogen mn, so wie aus b, mit b'c', den Bogen op, daß sie sich in c schneiden, und verbinde c mit a und b durch Linien.

§. 14.

Betrachtet man die Dreiecke nach ihren Winkeln, so werden sie eingetheilt:

1) In rechtwinkliche Dreiecke, die einen rechten Winkel enthalten, wie abc Fig. 21.

Die Seitenlinien eines rechtwinklichen Dreiecks erhalten noch besondere Benennungen, so heißt z. B. die Linie bc, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Hypotenuse, und die beiden, den rechten Winkel einschließenden Seitenlinien ab und ac, werden Catheten genennt.

Digitized by Google

2) In spitzwinkliche Dreiecke, worin drei spitze Winkel befindlich sind, wie def Fig. 22.

3) In stumpfwinkliche Dreiecke, welche einen stumpfen Winkel umschließen, wie igh Fig. 23.

Zusatz. Ein Dreieck kann mehrere der angeführten Eigenschaften in sich vereinigen. So ist z. B. das Dreieck abc Fig. 18. gleichschenklich und zugleich spitzwinklich, das Dreieck abc Fig. 21. ungleichseitig und zugleich rechtwinklich ꝛc. Jedoch kann ein Dreieck nie mehr als einen rechten oder stumpfen Winkel enthalten, indem die drei Winkel in jedem Dreieck zusammen, nicht mehr als 180° zum Maß haben können [§ 26.] und zwei rechte Winkel schon 180°, zwei stumpfe Winkel mehr als 180° betragen.

Von der Aehnlichgleichheit der Dreiecke.

§. 15.

Gleich werden Figuren genennt, wenn sie einen gleich großen Raum umschließen, ihre Gestalt sey übrigens welche sie wolle. So kann z. B. ein ungleichseitiges Dreieck einem gleichschenklichen ꝛc. an Flächeninhalt gleich seyn. Das Zeichen der Gleichheit ist =.

Aehnlich heißen Figuren, wenn sie einerlei Gestalt haben, an Größe aber verschieden sind. Die Aehnlichkeit der Figuren beruhet auf der Gleichheit der gleichliegenden Winkel, wie in der Folge gezeigt wird. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ∽.

Aehnlichgleich werden endlich Figuren genennt, deren Raum und Gestalt übereinstimmend ist, so daß wenn man sie auf einander legt, alle gleichliegende Linien und Winkel sich decken. Die Aehnlichgleichheit der Figuren wird durch ≌ bezeichnet.

Aehnlichgleiche Dreiecke entstehen:

1) Wenn man zwei Seitenlinien und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich macht.

Digitized by Google

5te Aufgabe.

Es sey der Winkel x', und die beiden ihn einschließenden Seitenlinien a'b' und a'c' Fig. 24. gegeben. Es sollen zwei ähnlichgleiche Dreiecke ABC und abc, construirt werden.

Auflösung.

Man mache AC und ac = a'c' und nach §. 12. ∠X und ∠x = ∠x'; ferner gebe man AB und ab, die Länge von a'b', und verbinde B und C, so wie b und c, durch Linien.

2) Wenn man eine Seitenlinie und die anliegenden Winkel gleich macht.

6te Aufgabe.

Die Seitenlinie a'b' und die anliegenden Winkel x' und y' sind gegeben; es sollen zwei ähnlichgleiche Dreiecke ABC und abc Fig. 25. gezeichnet werden.

Auflösung.

Nachdem AB und ab der gegebenen Linie a'b' gleich gemacht worden ist, trage man nach §. 12. den ∠x', an A und a, so wie den ∠y', an B und b und verlängere die Schenkel beider Winkel, bis sie sich in C und c schneiden.

3) Wenn die gleichliegenden Seitenlinien einerlei Länge erhalten.

7te Aufgabe.

Zwei ähnlichgleiche Dreiecke vermittelst der gegebenen Seitenlinien a'b', a'c' und b'c' zu zeichnen Fig. 26.

Auflösung.

Man mache AB und ab = a'b'; beschreibe mit a'c', aus A und a, die Bogen MN und mn, so wie mit b'c', aus B und b, die Bogen OP und op, daß sie sich in

Digitized by Google

C und c schneiden. Werden sodann C mit A und B und c mit a und b durch Linien verbunden, so decken sich alle Theile beider Dreiecke, wenn man sie aufeinander legt.

Zusatz. Aus vorstehenden Constructionen ersiehet man, daß bei ähnlichgleichen Dreiecken, gleiche Seitenlinien auch gleichen Winkeln gegenüber liegen.

Lehrsätze ohne weitere Beweise, welche sich auf die Winkel der Dreiecke beziehen und wovon man sich durch Ausmessung und Auftragung überzeugen kann.

§. 16.

1) Die drei Winkel eines jeden Dreiecks sind zweien rechten Winkeln gleich, oder haben 180° zu ihrem Maße; z. B. wie ∠x, y, z Fig. 27. [§. 26.]. Hieraus folgt:
2) Zwei Winkel, wie x und y Fig. 27., welche an einer Seitenlinie eines Dreiecks liegen, sind kleiner als zwei rechte Winkel oder 180° [§. 22.].
3) Die Winkel x und y Fig. 18. an der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks, sind einander gleich [§. 19.].
4) Eine aus der Mitte der Grundlinie errichtete Perpendiculare, in einem gleichschenklichen Dreiecke, theilt den Winkel an der Spitze desselben in zwei gleiche Theile; so wie eine Perpendiculare, aus der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks auf die Grundlinie gefällt, letztere in zwei gleiche Theile theilt [§. 19.].
5) Der äußere Winkel o Fig. 27., wenn eine Seitenlinie verlängert wird, ist größer als jeder der beiden innern x und y, die ihm gegenüber liegen [§. 20.].

Digitized by Google

6) Der äußere Winkel o Fig. 27. ist jederzeit so groß, als die beiden innern gegenüberliegenden Winkel (x + y) [§. 27.].

7) Die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind einander gleich, folglich ist das Maß von jedem 60° [§. 26.].

Mit Hülfe des bisher Vorgetragenen sind folgende Aufgaben zu lösen.

§. 17.

8te Aufgabe.

Der Winkel mah Fig. 28. soll durch Construction in zwei gleiche Theile ∠o = ∠u getheilt werden.

Auflösung.

Aus dem Scheitelpunkte a schneide man ab und ad von gleicher Länge ab; beschreibe mit willkührlicher, doch gleicher Eröffnung des Zirkels, das b und d zwei Bogen, die sich in c schneiden, und verbinde a und c durch ac, so ist nach der 7ten Aufgabe △ abc ≅ △ acd, folglich ∠o = ∠u.

§. 18.

9te Aufgabe.

Ein rechter Winkel abc Fig. 29. soll durch Construction in drei gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung.

Zwischen die beiden Schenkel des rechten Winkels abc. wird mit beliebiger Eröffnung des Zirkels, der Bogen aecd, und mit derselben Eröffnung aus a und c, die Bogen bd und be beschrieben, wo sodann die aus b nach e und d gezogenen Linien, den Winkel abc in drei gleiche Winkel n, u und x eintheilen; denn die Dreiecke abd und ebc

Digitized by Google

sind gleichseitig, folglich nach (7) §. 16. der ∠abd = ∠ ebc = 60°, daher ∠ o = ∠ x = (90 — 60) = 30° und ∠ u = 90° — (∠ o + x) = (90 — 60) = 30°, also ∠ o = ∠ u = ∠ x = $\frac{1}{3}$ ∠ abc.

§. 19.

10te Aufgabe.

Mehrere Punkte, wie s, o ꝛc. Fig. 30., sollen in die Richtung von zwei gegebenen Punkten a und m, ohne Lineal, blos mit Hülfe des Zirkels gebracht werden.

Auflösung.

Aus a beschreibe man durch m den Bogen xy; mache aus m den Bogen mb = mc; setze den Zirkel in b und c ein, und ziehe mit beliebiger, jedoch gleicher Entfernung, die Bogen qh und de, daß sie sich in s schneiden. Ferner werden aus s die gleichgroßen Theile sf und sg abgeschnitten, und aus f und g die Bogen pi und kl mit gleicher Oeffnung beschrieben, wodurch o und s in der Richtung am zu liegen kommen. Denn durch diese Constructionen entstehen die gleichschenklichen Dreiecke bsc und fog, deren Spitzen s und o, so wie die Mitte ihrer Grundlinien, durch ao verbunden sind, und folglich nach (4) §. 16., eine gerade Linie bilden müssen.

§. 20.

11te Aufgabe.

Eine gegebene Linie ab Fig. 31. soll durch eine andere, rechtwinklich in zwei gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung.

Aus den Endpunkten a und b der gegebenen Linie beschreibe man mit gleicher Eröffnung des Zirkels über und unterhalb derselben Bogen, die sich in e und d schneiden, und verbinde letztere durch ed, so wird ab in e, in zwei

Digitized by Google

gleiche Theile ac = cb getheilt, und sowohl ∠o als ∠u sind rechte Winkel [§. 18. 6te Aufgabe].

Zusatz. Durch dieselbe Construction ist auf die Mitte einer Linie eine Perpendiculare zu ziehen.

§. 21.

12te Aufgabe.

In einem willkührlichen Punkte c einer gegebenen Linie Fig. 32., mittelst Construction, eine Perpendiculare zu errichten.

Auflösung.

Es sey die Linie ab und in ihr der Punkt c gegeben, aus welchem die Perpendiculare cd errichtet werden soll.

Man mache cf = cg. Aus f und g beschreibe man zwei Bogen mit gleicher Eröffnung des Zirkels, die sich in d schneiden und verbinde c und d durch cd; so ist letztere perpendicular auf ab [§. 18. Aufgabe 8.].

§. 22.

13te Aufgabe.

Von einem außerhalb einer Linie ab angenommenen Punkt c Fig. 33. eine Perpendiculare auf ab zu fällen.

Auflösung.

Der Zirkel wird in dem gegebenen Punkte c eingesetzt, und die Linie ab mit beliebiger, jedoch gleicher Oeffnung in f und g geschnitten. Aus beiden letzteren Punkten beschreibe man unterwärts der Linie ab zwei Bogen, die sich in e schneiden, lege das Lineal an c und e und ziehe die Linie cd; so stehet cd auf ab rechtwinklich [§. 18. 9te Aufgabe.].

Anmerkung. Sollte unter ab nicht Raum genug seyn, um die Bogen ziehen zu können, so beschreibe man selbige über oder unter c, und verbinde den dadurch erhaltenen Durchschnittspunkt mit c, durch eine Linie, die man bis d verlängert.

Digitized by Google

§. 23.

14te Aufgabe.

Am Ende einer Linie ab Fig. 34. einen rechten Winkel mittelst Construction zu errichten.

Auflösung.

Aus dem Endpunkte a wird, mit beliebiger Eröffnung des Zirkels, der Bogen gcd beschrieben; ferner mit derselben Oeffnung die Sehnen gc und cd bestimmt. Aus d und c ziehe man mit gleichen Halbmessern zwei Bogen, die sich in f schneiden, und verbinde a und f durch af, so ist letztere perpendicular auf ab; denn die Dreiecke cag und dac sind gleichseitig, daher $\angle$ dac und $\angle$ cag $= 60°$. Ferner theilt die Linie af den Winkel dac nach §. 17. in zwei gleiche Theile; deßhalb ist $\angle$ eac $= 30°$, folglich $\angle$ fag $= (30 + 60) = 90° =$ einem rechten Winkel.

Oder, man nehme über der gegebenen Linie ih Fig. 35. einen beliebigen Punkt o an, setze den Zirkel in selbigen, eröffne ihn bis zum Endpunkte i und beschreibe einen halben Kreis, welcher ih in n schneidet; ziehe durch n und o die Linie nk bis an die entgegengesetzte Seite des halben Kreises, und verbinde i und k durch im, so ist mi auf ih rechtwinklich [§. 67.].

Anmerkung. Hat man auf dem Felde, oder überhaupt am Endpunkte einer Linie, eine Perpendiculare zu errichten, so kann man sich hierzu des pythagorischen Lehrsatzes §. 59. bedienen. Man theile nämlich eine Schnure in 3, 4 und 5 gleiche Theile, bemerke diese Punkte, verbinde die Endpunkte der Schnure, und spanne selbige in diesen Punkten gehörig an, so wird ein rechtwinkliches Dreieck entstehen.

Von den Eigenschaften der Parallellinien.

§. 24.

Die Lehrsätze, welche sich auf Parallellinien beziehen, und wovon man sich durch Construction und Ausmessung überzeugen kann, sind folgende:

1) Wenn zwei Parallellinien ab und cd Fig. 36. durch eine dritte ef geschnitten werden, so sind die an einer Seite der Durchschnittslinie liegenden Winkel $(o + u) = 180° =$ zwei rechten Winkeln [§. 23.].
2) Die Wechselwinkel o und w, so wie v und u sind unter obiger Bedingung einander gleich [§. 23. (2)].
3) Der äußere Winkel x ist dem innern gleichliegenden w gleich [§. 23. (3)].
4) Perpendicularen, wie hg und ik, zwischen Parallellinien, sind einander gleich [§. 23. (4)].

Construction von Parallellinien unter gewissen Bedingungen.

§. 25.

15te Aufgabe.

Durch den Punkt c Fig. 37. soll mit ab eine Parallele gezogen werden, indem man das Maß der an einer Seite der Durchschnittslinie gk liegenden Winkel $(o + u) = 180°$ d. i. einem halben Kreise gleich macht.

Auflösung.

Man lege durch den gegebenen Punkt c eine Linie gk in beliebiger Richtung, welche ab in irgend einem Puncte m schneidet; beschreibe aus m zwischen am und mg einen Bogen pr, ferner mit derselben Oeffnung des Zirkels aus c, den unbestimmten Bogen ns und zugleich über die Linie xy einen halben Kreis kih; fasse die Sehne pr im Zirkel, und trage sie aus h nach i; ferner die Sehne ki aus n nach v, so ist das Maß der Winkel $(u + o) = 180° =$ einem halben Kreise; daher wird nach (1) §. 24. die durch v und c gezogene Linie cd mit ab parallel seyn.

Digitized by Google

§. 26.

16te Aufgabe.

Eine Parallellinie durch den gegebenen Punkt c Fig. 38. mit ab zu ziehen, indem die Wechselwinkel o und u gleich gemacht werden.

Auflösung.

Aus m lege man den Bogen kl zwischen die Linien ma und mg, und beschreibe mit derselben Oeffnung aus c den unbestimmten Bogen vp; trage die Sehne kl aus v nach q, so sind die Wechselwinkel o und u gleich gemacht, und de durch c und q gelegt, ist nach §. 24. (2) mit ab parallel.

§. 27.

17te Aufgabe.

Durch den gegebenen Punkt c Fig. 39. soll mit ab, eine Parallele gezogen werden, indem der äußere Winkel o, dem innern gleichliegenden Winkel u gleich gemacht wird.

Auflösung.

Nachdem aus m und c die beiden Bogen nr und qw mit gleicher Eröffnung des Zirkels beschrieben worden sind, mache man die Sehne qp = nv und ziehe durch c und p die Linie de, so ist selbige nach (3) §. 24. parallel mit ab.

§. 28.

18te Aufgabe.

Mittelst Gleichmachung zweier Perpendicularen, durch einen gegebenen Punkt c, eine Parallele mit ab zu ziehen Fig. 40.

Auflösung.

Man errichte aus c, nach Anleitung des 22. §., die

Perpendiculare ch auf ab, so wie nach §. 21. aus dem beliebig angenommenen Punkte l, die Perpendiculare lm, und mache lp = nc, so ist eine durch c und p gelegte Linie dc, parallel mit ab nach (4) §. 24.

§. 29.

19te Aufgabe.

Durch c soll mit ab eine Parallele gezogen werden, indem man aus c und f Fig. 41. Bogen, mit gleichen Halbmessern, beschreibt.

Auflösung.

Der Zirkel wird in den angenommenen Punct c eingesetzt, und durch Versuche ein Halbmesser cg gefunden, daß der mit selbigen beschriebene Bogen mn, die Linie in g berührt. Mit derselben Eröffnung des Zirkels wird aus einem in der Linie ab angenommenen Punkte f der Bogen op unterwärts beschrieben, und der Berührungspunkt h mit c durch dc verbunden; so ist letztere Linie mit ab parallel; weil von allen aus c und f denkbaren Halbmessern, zwei derselben, wie cg und fh, perpendicular zwischen ab und dc zu liegen kommen.

§ 30.

20ste Aufgabe.

Die Linie ab und der außer ihr befindliche Punkt c ist gegeben; es soll durch letztere, mittelst eines materiellen Winkels und Lineals, eine Parallele mit ab gezogen werden Fig. 42.

Auflösung.

Man lege den Winkel hik mit einer seiner Catheten hi an ab; bringe mit gehöriger Vorsicht das Lineal fg an die Hypotenuse ki (oder wie f'g' zeigt, an die Cathete l'n'); lasse den Winkel bis zum Punkte c (oder l) herabgleiten, und ziehe lc (oder l'c'), welche mittelst An-

legung eines Lineals verlängert werden kann: denn durch dieses Verfahren wird der innere Winkel hik dem äußern lon nach (3) §. 24. gleich gemacht.

Anmerkung. Um mehrere Parallelen durch gegebene Punkte auf dem Papier zu ziehen, ist es am bequemsten, statt des Lineals und Winkels, sich zweier gleich großer, etwa 8 bis 10 Zoll langer hölzernen Winkel zu bedienen, deren Hypotenusen bei dem Gebrauche aneinander gelegt werden. Bringt man die Seitenlinie des von diesen Winkeln gebildeten Rechtecks an die gegebene Linie, mit welcher Parallelen gezogen werden sollen, und schiebt den obern Winkel mit Berührung des andern an die gegebnen Punkte, so sind mehrere Parallelen richtig und leicht zu ziehen.

Von Construction vierseitiger Figuren.

§. 31.

Die vierseitigen Figuren werden in reguläre, halbreguläre und irreguläre eingetheilt.

Regulär werden sie genennt, wenn ihre Seitenlinien und Winkel gleich sind. Es gibt daher nur eine reguläre vierseitige Figur, nämlich das Quadrat, weil der Begriff von einem Quadrate, vier gleiche Seiten und Winkel voraussetzt Fig. 43.

Halbregulär heißen sie, wenn nur die gegenüberliegenden Seitenlinien und Winkel gleich sind. Hierzu gehört:

1) Das Rectangel, Oblongum oder das längliche Viereck Fig. 44., welches vier rechte Winkel hat, und bei dem die gegenüberliegenden Seitenlinien gleich sind.
2) Der Rhombus oder die Raute Fig. 45., in welcher zwei gegenüberliegende spitze und stumpfe Winkel von vier gleichen Seiten umschlossen sind.
3) Die Rhomboide oder längliche Raute Fig. 47., wo nur die gegenüberliegenden Seitenlinien und Winkel einander gleich sind.

Digitized by Google

Vorstehende vierseitige Figuren begreift man auch unter der allgemeinen Benennung Parallelogramme, weil ihre gegenüberliegenden Seitenlinien eine parallele Lage haben.

Irregulär werden sie endlich genennt, wenn ihre Seitenlinien und Winkel an Größe verschieden sind, nämlich:

1) Das Trapezium, in welchem zwei gegenüberliegende Seitenlinien parallel, die andern beiden aber convergirend sind Fig. 49.

2) Die Trapezoide, bei welcher keine Seite mit der andern parallel läuft Fig. 51.

§. 32.

21ste Aufgabe.

Mittelst einer gegebenen Seitenlinie a'b' Fig. 43. ein Quadrat zu construiren.

Auflösung.

1) Man ziehe einen rechten Winkel man, mache ab und ac = a'b' und beschreibe mit derselben Oeffnung des Zirkels aus b und c Bogen, die sich in d schneiden, so entsteht mittelst Zusammenziehung der Punkte b, d, c durch Linien, das Quadrat abcd. Oder:

2) Nachdem man den rechten Winkel gezeichnet und ab = ac = a'b' gemacht hat, so lege man die in §. 30. Anmerk. angeführten Winkel auf vorbeschriebene Art an ab und ziehe durch c die Parallele cd, dann lege man sie an ac und ziehe durch b, die Parallele bd mit den Schenkeln des rechten Winkels.

§. 33.

22ste Aufgabe.

Ein Rectangel, durch zwei gegebene Linien a'c' und a'b' Fig. 44. zu construiren.

Digitized by Google

Auflösung.

1) Sobald der rechte Winkel xay gezeichnet worden ist, trage man auf den einen Schenkel die Linie a'b' aus a nach b und auf den andern, a'c' aus a nach c, beschreibe mit a'b' aus c den Bogen mn, und mit a'c' aus b den Bogen op, und verbinde d mit c und b durch Linien. Oder:

2) Man zeichne den Winkel xay, trage auf den einen Schenkel die Linie a'b' aus a nach b, auf den andern a'c' aus a nach c und verfahre übrigens wie §. 32. (2).

§. 34.

23ste Aufgabe.

Einen Rhombus zu zeichnen, wenn eine Seitenlinie a'b' und der Winkel x' Fig. 45. gegeben ist.

Auflösung.

1) Der Winkel x' wird (nach §. 12.) an a getragen; ferner die Schenkel ab und ac der gegebenen Linie a'b' gleich gemacht, und mit derselben Eröffnung aus b und c Bogen beschrieben, die sich in d schneiden, wo, durch Verbindung der Punkte c und b mit d, der Rhombus abdc entsteht.

2) Oder, nachdem der Winkel x gezeichnet worden ist, verfahre man nach §. 32. (2).

§. 35.

24ste Aufgabe.

Einen Rhombus mittelst einer Seitenlinie und der perpendicularen Höhe zu construiren Fig. 46.

Auflösung.

Man zeichne den rechten Winkel xay, trage die gegebene Perpendiculare a'c' aus a nach c, ziehe mit ay

(nach §. 25 bis 30.) eine Parallele durch c; mache ab = a'b', schneide mit derselben Länge aus a, die Linie ce durch den Bogen mn und trage a'b' aus d nach e; so entsteht durch die Verbindung der Punkte a und d, b und e der Rhombus adeb.

§. 36.

25ste Aufgabe.

Eine Rhomboide zu zeichnen, wenn zwei Seitenlinien a'b', a'c' und der von ihnen eingeschlossene Winkel x' Fig. 47. gegeben sind.

Auflösung.

1) Der Winkel x wird nach §. 12, dem Winkel x', ferner ac = a'c' und ab = a'b' gemacht; endlich mit a'b' aus c, so wie mit a'c' aus b, Bogen beschrieben, die sich in d schneiden, und d, mit c und b durch Linien verbunden. Oder:

2) Nachdem der Winkel = x dem Winkel x' und ac = a'c', ferner ab = a'b' gemacht worden, verfahre man nach §. 32. (2).

§. 37.

26ste Aufgabe.

Eine Rhomboide vermittelst zweier gegebenen Seitenlinien a'b' und a'd' und der perpendicularen Höhe a'c' Fig. 48. zu construiren.

Auflösung.

Nachdem der rechte Winkel xay gezeichnet worden ist, trage man a'b' aus a nach b, und die gegebene Höhe a'c' aus a nach c, ziehe durch c die Linie ce mit ay parallel, schneide aus a mit a'd' die Parallele ce in d, und mache de = a'b'; so entsteht durch Verbindung der Punkte a, d und b, e die Rhomboide adeb.

Digitized by Google

§. 38.

27ste Aufgabe.

Ein Trapezium zu zeichnen, wenn ein Winkel z. B. x′, ferner eine an den Winkel anliegende Seitenlinie a′c′ und die Länge beider Parallelen a′b′ und c′d′ Fig. 49. gegeben sind.

Auflösung.

Der Winkel x wird = dem Winkel x′, ferner ab = a′b′ und ac = a′c′ gemacht, sodann die Parallele cm mit ab durch c gezogen, und c′d′ aus c nach d getragen; zuletzt d mit b, durch die Linie db verbunden.

§. 39.

28ste Aufgabe.

Ein Trapezium zu beschreiben, wenn die Grundlinie a′b′, ferner die beiden anliegenden Winkel x′ und y′ und eine Seitenlinie a′c′ Fig. 50. gegeben sind.

Auflösung.

Man mache ab = a′b′; ferner nach §. 12. ∠x = ∠x′, ∠y = ∠y′ und ac = a′c′, wo durch c, eine Parallele cd mit ab gezogen, das verlangte Trapezium hergestellet.

§. 40.

29ste Aufgabe.

Eine Trapezoide zu construiren, wenn ein Winkel x′ und die vier Seitenlinien a′b′, a′c′, c′d′ und b′d′ Fig. 51. gegeben sind.

Auflösung.

Hierbei muß die Lage der Linien bestimmt seyn, außerdem würde die Trapezoide eine andere Gestalt annehmen. Deshalb bezeichne a′b′ die Grundlinie, a′c′ die dem Win-

Digitized by Google

kel x′ anliegende, b′d′ die demſelben gegenüberliegende Seitenlinie.

Nachdem ab = a′b′ gemacht worden iſt, trage man den Winkel x′ an a, gebe ac die Länge von a′c′; beſchreibe mit c′d′ aus c, und mit b′d′ aus b Bogen, die ſich in d ſchneiden, zuletzt wird d mit c und b durch Linien verbunden.

§. 41.

30ſte Aufgabe.

Eine Trapezoide mittelſt zweier gegebenen Winkel x′ und y′, und den dieſelben einſchließenden Seitenlinien a′b′, a′c′ und b′d′ Fig. 52. zu zeichnen.

Auflöſung.

Man trage a′b′ aus a nach b, ferner den Winkel x′ an a und y′ an b; mache ac = a′c′ und bd = b′d′, ſo gibt c mit d durch eine Linie verbunden, die Trapezoide acdb.

§. 42.

31ſte Aufgabe.

Eine Trapezoide zu zeichnen, wenn die vier Seitenlinien a′b′, a′c′, c′d′, b′d′ und die Diagonale a′d′ Fig. 53. gegeben ſind.

Auflöſung.

Bei dieſer Conſtruction iſt vorauszuſetzen, daß die beiden, nach jeder Seite der Diagonale liegenden Linien, wie a′c′ und c′d′, oder a′b′ und d′b′ zuſammen größer als die Diagonale a′d′ ſeyn müſſen.

Man mache deshalb ad = a′d′, ziehe aus a mit a′c′ und aus d mit d′c′ zwei Bogen, die ſich in c, ferner aus a mit a′b′ und aus d mit d′b′ zwei Bogen, die ſich in b ſchneiden, und verbinde c mit a und d, ſo wie b mit a und d durch Linien.

Digitized by Google

Von den Vielecken oder Polygonen, so wie von der Construction regulärer Polygone, aus gegebenen Seiten und im Kreise, von gegebenen Halbmessern.

§. 43.

Wenn Figuren von mehr als vier Seitenlinien umschlossen sind, so werden sie allgemein Vielecke (Polygone) genennt.

Regulär heißen sie, wenn sowohl ihre Seitenlinien, als die von ihnen eingeschlossenen Winkel einander gleich sind. Sie haben die Eigenschaft, daß, wenn um selbige ein Kreis beschrieben wird, ihre Eckpunkte in die Peripherie des Kreises fallen. Deßhalb ist auch im entgegengesetzten Falle ein jedes reguläre Vieleck in einem Kreise zu beschreiben. Nachstehende Aufgaben enthalten die hierher gehörigen Constructionen, welche theils aus linearen, theils aus analytischen Lehrsätzen hergeleitet sind.

32ste Aufgabe.

Ein reguläres Fünfeck zu zeichnen, dessen Seite a'b' gegeben ist.

Auflösung.

Man ziehe, wie in Fig. 54., eine Linie mn unbestimmt, trage darauf ab = a'b', und beschreibe aus a und b mit ab, die Bogen ac = bc; ferner errichte man in der Mitte von ab die Perpendiculare cd und verlängere sie nach Belieben. Nun theile man den Bogen ac in 6 gleiche Theile und ziehe mit c; 1 den Bogen 1; 5 abwärts, setze den Zirkel in 5 und eröffne ihn bis a, so ist 5a der Halbmesser des Kreises, auf dessen Peripherie sich die gegebene Seite a'b' 5 Mal herum tragen läßt. Man beschreibe daher mit 5a einen Kreis, trage a'b' auf dessen Peripherie 5 Mal aneinander und verbinde die erhaltenen

Digitized by Google

Punkte durch Linien, so entsteht das verlangte reguläre Fünfeck.

33ste Aufgabe.

Ein reguläres Sechseck zu zeichnen, dessen Seite a'b' Fig. 54. gegeben ist.

Auflösung.

Mit a'b' Fig. 54. wird ein Kreis beschrieben; a'b' auf dessen Peripherie 6 Mal herumgetragen und die Punkte durch Linien verbunden.

34ste Aufgabe.

Ein reguläres Siebeneck zu zeichnen, dessen Seite a'b' gegeben ist.

Auflösung.

Mit c;1 Fig. 54. ziehe man den Bogen 1;7 aufwärts, setze den Zirkel in 7 ein und eröffne ihn bis a, und beschreibe mit dieser Oeffnung einen Kreis, so läßt sich die gegebene Seite a'b' 7 Mal darauf herum tragen und die dadurch erhaltenen Punkte, wie vorhin, durch Linien verbinden.

35ste Aufgabe.

Ein reguläres Achteck zu construiren, dessen Seite a'b' gegeben ist.

Auflösung.

Man ziehe mit c;2, Fig. 54. den Bogen 2;8, setze den Zirkel in 8 und eröffne ihn bis a, welches der Halbmesser eines Kreises ist, dessen Peripherie die gegebene Seite a'b' 8 Mal enthält.

1ste Anmerkung. Ziehet man aus den übrigen Theilungspunkten des Bogens ac Fig. 54. die Bogen 3,9; 4,10; 5,11; 6,12, so ist wie vorhin, die Eröffnung 9;a der Halbmesser eines Kreises, auf dessen Peripherie a'b 9 Mal; 10;a der Halbmesser, worauf a'b, 10 Mal; 11;a der Halbmesser eines Kreises, auf dessen Peripherie ab, 11 Mal, und 12;a der

Halbmesser eines Kreises, auf dessen Peripherie, ab sich 12 Mal herum tragen läßt. Man kann daher auf diese Weise, alle reguläre Vielecke bis zum Zwölfecke, für die gegebene Seitenlinie a'b' leicht construiren.

2te Anmerkung. Auch ist für eine gegebene Linie a'b' ein reguläres Vieleck von jeder beliebigen Anzahl Seiten zu zeichnen, wenn man 360° durch letztere dividirt, den Quotienten von 180° abzieht, die Differenz halbirt, das dadurch erhaltene Gradmaß mittelst eines Transporteurs an die Endpunkte der gegebenen Linie a'b' anträgt und die Schenkel beider Winkel ziehet, bis sie sich schneiden. In letzterem Durchschnittspunkt wird sodann der Zirkel eingesetzt, bis a' oder b' eröffnet und ein Kreis beschrieben, auf dessen Peripherie die Linie a'b' als Seitenlinie des Polygons herum getragen werden kann. Für ein Achteck beträgt demnach der an a' und b' zu tragende Winkel

$$\left[\frac{180 - \frac{360}{8}}{2}\right]^{\circ} = \left[\frac{180 - 45}{2}\right]^{\circ} = \frac{135^{\circ}}{2} = 67\tfrac{1}{2} \text{ Grad.}$$

§. 44.

Sollte im entgegengesetzten Falle der Halbmesser eines Kreises gegeben seyn und die Seitenlinie für ein in selbigem zu beschreibendes Vieleck, durch Construction gefunden werden, so ist hierbei auf folgende Weise zu verfahren:

36ste Aufgabe.

Ein reguläres Dreieck in einem Kreis zu beschreiben Fig. 55.

Auflösung.

Man ziehe mit dem Halbmesser des Kreises, aus einem beliebigen Punkte d der Peripherie, den Bogen amb, fasse die Sehne ab in den Zirkel, beschreibe aus a und b Bogen, die sich in c schneiden und verbinde c mit a und b durch Linien, so entsteht das reguläre oder gleichseitige Dreieck, dessen Eckpunkte in die Peripherie des Kreises fallen.

Digitized by Google

§. 45.

37ste Aufgabe.

Ein reguläres Viereck in einem gegebenen Kreise zu beschreiben Fig. 56.

Auflösung.

Nachdem der Durchmesser ae gezogen worden ist, setze man den Zirkel in a und e ein und beschreibe mit beliebiger, aber gleicher Oeffnung ober- und unterwärts Bogen, die sich in x und y schneiden. Die Verbindungslinie xy theilt nebst ae den Kreis in vier Quadranten, deren Durchschnittspunkte a, b, c und d mittelst Linien zu verbinden sind, wodurch das reguläre Viereck oder Quadrat abcd entsteht.

§. 46.

38ste Aufgabe.

Ein reguläres Fünfeck in einem gegebenen Kreis zu beschreiben Fig. 57.

Auflösung.

Man ziehe, wie in voriger Aufgabe, zwei Durchmesser fg und bh, welche sich im Mittelpunkte des Kreises i rechtwinkelich schneiden; beschreibe mit dem Halbmesser gi den Bogen pin und verbinde die Durchschnittspunkte n und p durch np, so theilt selbige den Halbmesser ig in zwei gleiche Theile ik = kg. Nun setze man den Zirkel in k, eröffne ihn bis b und beschreibe den Bogen bm, so ist bm die Seitenlinie des regulären Fünfecks, welche auf der Peripherie herum zu tragen ist. Zuletzt werden die Punkte b, a, e, d und c durch Linien verbunden.

§. 47.

39ste Aufgabe.

Ein reguläres Sechseck in einem Kreis zu zeichnen Fig. 58.

Digitized by Google

Auflösung.

Diese Construction ist der in §. 43. 33ste Aufgabe völlig gleich.

§. 48.

40ste Aufgabe.

Ein reguläres Siebeneck in einem Kreis zu construiren Fig. 59.

Auflösung.

Man ziehe aus einem beliebigen Punkte m der Peripherie, mit dem Halbmesser mc, einen Bogen acb, verbinde die Durchschnittspunkte a und b durch ab, und theile letztere nach §. 20. in zwei gleiche Theile ad = db; sodann trage man ad oder db, als die Seite des regulären Siebenecks, auf der Peripherie des Kreises herum, und verbinde die gefundenen Punkte g, h, i, k, b, e und f durch Linien.

§. 49.

41ste Aufgabe.

Construction eines regulären Achtecks in einem gegebenen Kreis Fig. 60.

Auflösung.

Man ziehe die beiden sich im Mittelpunkte c rechtwinklich schneidenden Durchmesser ab und de; aus den Punkten a und d beschreibe man mit willkührlicher, doch gleicher Eröffnung des Zirkels, Durchschnittsbogen in v, so wie aus a und e in w; verbinde die gefundenen Durchschnittspunkte v und w mit dem Mittelpunkte c durch Linien und verlängere sie bis i und h; so wird die Peripherie des Kreises in acht gleiche Theile getheilt, welche durch Sehnen af, fd ꝛc. verbunden werden.

Digitized by Google

§. 50.

42ste Aufgabe.

Ein reguläres Neuneck in einem Kreis zu beschreiben Fig. 61.

Auflösung.

Der Kreis wird wie vorhin durch senkrechte Durchmesser in vier Quadranten getheilt. Nun setze man den Zirkel in a, eröffne ihn bis d und beschreibe den Bogen df; sodann in b und beschreibe mit dem Halbmesser bc den Bogen cg, so ist die Linie hf die Seite des regulären Neunecks, welche aus a nach i, e, g, h ꝛc. auf der Peripherie herumgetragen werden kann.

§. 51.

43ste Aufgabe.

Construction eines regulären Zehnecks in einem gegebenen Kreis Fig. 62.

Auflösung.

Diese Construction ist der in §. 46. völlig gleich, nur daß durch den Bogen bm die Linie mc, als Seitenlinie des regulären Zehnecks abgeschnitten wird.

§. 52.

44ste Aufgabe.

Ein reguläres Eilfeck in einem Kreis zu zeichnen Fig. 63.

Auflösung.

Man theile den Kreis mittelst der rechtwinklich sich schneidenden Durchmesser be und ad in vier Quadranten, beschreibe aus e mit dem Halbmesser ec den Bogen ick, und aus i mit ic den Bogen ch, ziehe ki und aus dem Durchschnittspunkte g nach h, die Linie gh, so ist fg die Seitenlinie des regulären Eilfecks.

Digitized by Google

§. 53.

45ste Aufgabe.

Construction eines regulären Zwölfecks in einen gegebenen Kreis Fig. 64.

Auflösung.

Der Kreis wird wie vorhin durch die Durchmesser ab und cd in vier Quadranten getheilt; aus den Punkten a, b, c und d durch den Mittelpunkt o, die Bogen mol, hog, eof und iok beschrieben, und die Durchschnittspunkte a, g, e, c ꝛc. durch Linien verbunden.

§. 54.

Außer den vorhergehenden gibt es noch folgende allgemeine Constructionen für jedes beliebige reguläre Vieleck.

Erste allgemeine Construction.

1) Nachdem der Durchmesser ab Fig. 65. gezogen worden ist, beschreibe man mit demselben, aus jedem seiner Endpunkte a und b, die Bogen dae und dbe so, daß sie sich in d und e schneiden, theile den Durchmesser ab in so viel gleiche Theile, als das Vieleck Seitenlinien bekommen soll (hier in sieben); trage einen solchen Theil aus dem Mittelpunkte c rechts und links nach n und m, und ziehe aus e durch letztere Punkte die Linien ef und eg, so ist die abgeschnittene Sehne fg, die Seitenlinie des zu verzeichnenden Vielecks (hier des Siebenecks), welche auf der Peripherie herum zu tragen ist. Oder:

2) Nachdem man die Bogen dae und dbe wie vorhin beschrieben, ziehe man durch den Punkt e und den zweiten Theilungspunkt 2, die Linie ed; diese schneidet einen Bogen ad ab, dessen Sehne die Seite des zu zeichnenden Vielecks ist.

Zweite allgemeine Construction.

Der Kreis Fig. 66. wird in vier Quadranten und einer derselben, z. B. db, in so viel gleiche Theile als

das Vieleck Seitenlinien erhalten soll (hier in sieben), eingetheilt. Von der Anzahl dieser Theile nehme man jedesmal 4 zur Seitenlinie des aufzutragenden Vielecks an.

Dritte allgemeine Construction.

Mit der Anzahl der Seitenlinien wird in 360° dividirt, wodurch man das Gradmaß des Bogens für jede Sehne oder Seitenlinie des Vielecks erhält. Um das gefundene Bogenmaß abzustechen, lege man den Transporteur an einen gezogenen Durchmesser ab Fig. 67., so daß der Mittelpunkt des letztern in dem des Kreises zu liegen kommt; bezeichne den Endpunkt des auf obige Art gefundenen Gradmaßes durch einen feinen Stich in m, verbinde letztern mit dem Mittelpunkte c durch die Linie mc, so schneidet sie die Länge des Bogens ab, dessen Sehne die Seitenlinie des verlangten Vielecks ist. Der Bogen bd für das Siebeneck beträgt z. B. $\frac{360}{7} = 51\frac{3}{7}°$; der Winkel x heißt der Centri-Winkel und der Winkel ebd der Polygon-Winkel des Vielecks.

Das Gradmaß eines Polygonwinkels wird gefunden, indem man das Gradmaß des Centriwinkels von 180° abzieht. Bei einem Siebenecke würde derselbe folglich $(180 - 51\frac{3}{7}°) = 128\frac{4}{7}°$ seyn [§. 78.].

Von Verwandlung der Figuren durch Construction, in andere, ihnen an Flächeninhalt völlig gleiche.

§. 55.

Eine Linie, aus der Spitze eines Dreiecks, auf die gegenüberliegende Seitenlinie rechtwinklich gezogen, heißt die Höhe und letztere die Grundlinie des Dreiecks. Sind die an der Grundlinie anliegenden Winkel beide spitz, so fällt die Höhe innerhalb; sollte hingegen einer derselben ein stumpfer Winkel seyn, außerhalb des Drei-

Digitized by Google

tes, wie Fig. 68. zeigt, wo ad die Höhe und bc die Grundlinie bezeichnet.

Die vorzüglichsten hierher gehörigen Lehrsätze, von denen man sich durch Auftragung und Ausmessung überzeugen kann, sind folgende:

§. 56.

1ster Lehrsatz.

Ein jedes Parallelogramm abcd Fig. 69. wird durch die Diagonale ac in zwei ähnlich, gleiche Dreiecke abc und adc getheilt [§. 25.].

Anmerkung. Diagonal wird die Linie genennt, welche zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Parallelogramms a und c oder b und d verbindet.

§. 57.

2ter Lehrsatz.

Zwei Parallelogrammen, von einerlei Grundlinie und Höhe, sind am Flächeninhalte gleich, ihre Gestalt sey, welche sie wolle [§. 30.]. So ist z. B. das Parallelogramm abcd dem Parallelogramm aefd in Fig. 70, 71 und 72. am Inhalte gleich, wegen Aehnlichgleichheit der Δabe und cdf.

§. 58.

3ter Lehrsatz.

Auch Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe haben einerlei Flächeninhalt [§. 32.]. Weshalb die Dreiecke abc, adc und aec Fig. 73. am Inhalte gleich sind, weil man sie als halbe Parallelogramme von einerlei Grundlinie und Höhe betrachten kann.

§. 59.

4ter Lehrsatz.

In jedem rechtwinklichen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich den Quadra-

ten der beiden Catheten, wie aus Fig. 74. zu ersehen ist; wo gfba = 16, ciha = 9 und bdec = 25 gleichgroßer Quadrate enthält und 9 + 16 = 25 ist [§. 36.]. Dieser wichtige Lehrsatz wird nach seinem Erfinder Pythagoras, der Pythagorische Lehrsatz genennt.

§. 60.

5ter Lehrsatz.

Wenn aus einem willkührlichen Punkte e eines Kreises Fig. 75. eine Perpendiculare ed auf einen beliebigen Durchmesser gefällt wird, so ist das Quadrat der Perpendiculare defg so groß als das Rectangel hdbi, welches den einen abgeschnittenen Theil db zur Grundlinie und den andern ad = dh zur Höhe hat [§. 74 und 75.].

Auf vorstehende Lehrsätze, begründen sich die Auflösungen folgender Aufgaben.

§. 61.

46ste Aufgabe.

Von einem Quadrate sey die Seitenlinie a'b' Fig. 76. gegeben; dasselbe soll durch Construction in ein Rectangel, von gegebener Seitenlinie a'e' verwandelt werden.

Auflösung.

Man beschreibe mit a'b' das Quadrat abcd, verlängere die Seitenlinien desselben, trage aus a, die Linie a'e' nach e, ziehe die Diagonale ei durch e und d, welche die verlängerte Seitenlinie bc in i schneidet und lege durch i und e die Parallelen gi und eg, so entstehet das Rectangel fdhg, welches am Flächeninhalte dem Quadrate abcd gleich ist [§. 55.].

Zusatz. Auf dieselbe Weise ist ein Rhombus in eine Rhomboide von gegebener Seitenlinie, so wie jedes Paral-

lelogramm in ein anderes von verschiedenen Dimensionen und gleichem Flächeninhalt umzuformen.

§. 62.

47ste Aufgabe.

Das Rectangel $a'b'c'd'$ Fig. 77. soll in ein Quadrat von gleichem Inhalte durch Construction verwandelt werden.

Auflösung.

Man trage die Seitenlinien $a'b'$ und $b'd'$ des gegebenen Rectangels aneinander, theile die vereinte Länge ad in zwei gleiche Theile $ac = cd$, beschreibe über ad aus c einen halben Kreis, und errichte in dem Zusammenstoßungspunkte b eine Perpendiculare, so ist eb die Seitenlinie eines Quadrats befg, welches nach §. 60. den Flächeninhalt des Rectangels $a'b'd'c'$ in sich enthält.

§. 63.

48ste Aufgabe.

Die gegebene Rhomboide $a'b'c'd'$ Fig. 78. soll durch Construction, in ein Rectangel von gleichem Inhalte verwandelt werden.

Auflösung.

Man verlängere die obere Seitenlinie $b'c'$, errichte in a' und d' zwei Perpendicularen $a'e$ und $d'f$, so ist nach §. 57. das Rectangel $a'efd' =$ der Rhomboide $a'b'c'd'$.

Zusatz. Auf gleiche Weise ist ein schiefes Parallelogramm in ein anderes, von gegebenem Winkel umzuformen.

§. 64.

49ste Aufgabe.

Ein Dreieck $a'b'c'$ Fig. 79. in ein Parallelogramm zu verwandeln, welches mit erste-

Digitized by Google

ren einen gemeinschaftlichen Winkel b′a′e umschließt.

Auflösung.

Durch den Scheitelpunkt b′ des gegebenen Dreiecks, wird mit der Grundlinie a′c′ die Parallele b′f gezogen; ferner die Grundlinie a′c′ in zwei gleiche Theile a′e = ec′ getheilt, und durch e mit a′b′ die Parallele de gelegt, so ist nach §. 56 und 57. das Parallelogramm a′b′de = dem Dreieck a′b′c′.

Zusatz. Sollte im Gegentheile, das Parallelogramm a′b′de Fig. 79. gegeben seyn und in ein Dreieck verwandelt werden, welches mit jenem den ∠b′a′e gemein hat, so verlängere man a′e, trage a′e aus e nach c′ und ziehe die Linie b′c′, so ist das Dreieck a′b′c′ = dem Parallelogramm a′b′ed.

§. 65.

50ste Aufgabe.

Das Dreieck a′b′c′ Fig. 80. soll in ein Rectangel von gleichem Inhalte verwandelt werden.

Auflösung.

Man ziehe durch den Scheitelpunkt b′ des Dreiecks mit a′c′ die Parallele eg, theile die Grundlinie a′c′ in zwei gleiche Theile a′d = dc′, errichte in a′ und d die Perpendicularen a′e und df, so ist das Rectangel a′efd = dem Dreieck a′b′c′ [§. 35.].

§. 66.

51ste Aufgabe.

Ein stumpfwinkliches Dreieck a′b′c′ Fig. 81. soll durch Construction in ein rechtwinkliches von gleichem Flächeninhalte verwandelt werden.

Digitized by Google

Auflösung.

Man ziehe durch den Scheitelpunkt a' des gegebenen Dreiecks, mit b'c', die Parallellinie a'm, errichte in b' eine Perpendiculare, welche a'm in d schneidet und verbinde d und c' durch eine Linie, so ist das Dreieck b'dc' nach §. 58. dem Dreiecke a'b'c' gleich.

§. 67.

52ste Aufgabe.

Ein ungleichseitiges Dreieck a'b'c' Fig. 82. soll in ein gleichschenkliches, von gleichem Flächeninhalte, verwandelt werden.

Auflösung.

Die Linie a'c' wird nach §. 20. durch ef in zwei gleiche Theile getheilt und aus b' mit a'c' die Parallele b'm gezogen. Zuletzt wird der Durchschnittspunkt d mit a' und c' mittelst Linien verbunden, so ist nach §. 68. das gleichschenkliche Dreieck a'dc' = dem Dreieck a'b'c'.

§. 68.

53ste Aufgabe.

Eine Trapezoide a'b'c'd' Fig. 83. soll durch Construction in ein Dreieck, von gleichem Flächeninhalte verwandelt werden.

Auflösung.

Man verlängere eine der Seitenlinien der Trapezoide z. B. a'b', ziehe die Diagonale b'd' und mit ihr durch c' die Parallele em, welche die verlängerte Linie in e schneidet und verbinde e und d' durch ed'; so ist das Dreieck b'ed' = dem Dreieck b'c'd' nach §. 58., folglich das Dreieck a'ed' = der Trapezoide a'b'c'd'.

Zusatz. Wäre die Trapezoide a'b'c'd' in ein rechtwinkliches Dreieck zu verwandeln, so kann mit dem Dreiecke a'ed' die Construction §. 66. oder durch wiederholte

Digitized by Google

Anwendung des Vorstehenden, ein jedes irreguläres Vieleck, in ein Dreieck, so wie letzteres, wenn es verlangt würde, nach §. 65. in ein Rectangel und nach §. 63. in ein Quadrat verwandelt werden.

§. 69.

54ste Aufgabe.

Ein gegebenes Dreieck abc Fig. 84. **in ein anderes, von gleichem Inhalte, dessen Höhe** a'd' **gegeben ist, durch Construction zu verwandeln.**

Auflösung.

Man errichte in a eine Perpendiculare und trage auf selbige die gegebene Höhe a'd' aus a nach d, ziehe dm mit ac parallel und verlängere bc, bis sie die Parallele in f schneidet, lege durch b die Parallele be mit af und verbinde f und e durch eine Linie, so ist das Dreieck fec = dem Dreiecke abc, weil die Dreiecke abe und feb eine gemeinschaftliche Grundlinie be, und wegen der Parallellinien bc und af auch einerlei Höhe haben.

§. 70.

55ste Aufgabe.

Das Dreieck abc Fig. 85. **soll, mit Beibehaltung des Winkels** abc, **der Grundlinie** bc **und des gegebenen Winkels** b'c'd' **in ein Trapezium, mittelst Construction verwandelt werden.**

Auflösung.

Nachdem der Winkel b'c'd' an c angetragen ist, ziehe man ad mit bc parallel, bis selbige den Schenkel des Winkels bcd schneidet, beschreibe über ad einen halben Kreis, lege durch b, die Linie be parallel mit cd, errichte in e eine Perpendiculare eh, beschreibe aus d mit hd den

Digitized by Google

Bogen hi, bis er ad in i schneidet, ziehe endlich mit be durch i die Parallele fi und durch f mit bc die Parallele fg, so ist das Trapezium bfgc = dem Dreiecke abc.

Anmerkung. Der Beweis hierzu ist analytisch zu führen und im 3ten Theile von Mayers Unterricht zur practischen Geometrie §. 307. nachzulesen.

§. 71.

56ste Aufgabe.

Den Flächeninhalt zweier Quadrate A' und B' Fig. 86. in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung.

Auf den einen Schenkel des rechten Winkels dac, trage man die Seitenlinie m', des Quadrats A', aus a nach d, auf den andern die Seitenlinie n', des Quadrats B', aus a nach c, ziehe die Hypotenuse dc und beschreibe mit selbiger nach §. 31. das Quadrat C, so ist nach §. 69. sein Flächeninhalt = dem Flächeninhalte der Quadrate (A' + B').

Zusatz. Auf dieselbe Weise sind mehr als zwei Quadrate in Eines zu verwandeln. Z. B. die Quadrate D', E', F', G' Fig. 87. Man trage auf die eine Cathete die Seitenlinie a', auf die andere die Seitenlinie b', verbinde x und w durch die Hypotenuse xw, errichte am Ende x der letztern, eine Perpendiculare xy und mache sie = c', ziehe die Hypotenuse yw und wiederhole dasselbe Verfahren mit d, so ist wz die Seitenlinie eines Quadrats wzmn, welches den Quadraten D' + E' + F' + G' gleich ist.

§. 72.

57ste Aufgabe.

Ein gegebenes Quadrat zu vervielfältigen, z. B. ein Quadrat, durch Construction, 5 Mal so groß als das gegebene A zu machen Fig. 88.

Digitized by Google

Auflösung.

Wenn a' die Seitenlinie des gegebenen Quadrats A' bezeichnet, so trage man selbige, aus dem Scheitelpunkte b eines rechten Winkels auf dessen Schenkel nach I und 1; ferner die Hypotenuse I;1, als die Seitenlinie eines Quadrats, welches doppelt so groß als A ist, aus b nach 2. Die Hypotenuse I;2 gibt die Seitenlinie eines Quadrats des dreifachen Inhaltes von A'. Eben so verfahre man mit den übrigen Hypotenusen, bis endlich ein Quadrat bcde entsteht, welches dem fünffachen Inhalte von A gleich kommt.

§. 73.

58ste Aufgabe.

Ein Quadrat zu construiren, dessen Flächeninhalt die Hälfte des gegebenen abcd ist Fig. 89.

Auflösung.

Man theile die vier Seitenlinien des Quadrats in die Hälfte, so geben die Verbindungslinien der Theilungspunkte f, g, h, e das verlangte Quadrat, als die Hälfte des gegebenen. Denn abcd besteht aus acht und ghef aus vier ähnlichgleichen Dreiecken.

§. 74.

59ste Aufgabe.

Ein Quadrat B' von einem größern A' hinwegzunehmen und den übriggebliebenen Flächeninhalt in ein Quadrat zu verwandeln Fig. 90.

Auflösung.

Nachdem ein rechter Winkel xyz verzeichnet worden ist, trage man die Seitenlinie b' des hinwegzunehmenden Quadrats B', aus y nach w und beschreibe mit der Seitenlinie a' des großen Quadrats A' aus w, den Bogen

Digitized by Google

mn, welcher xy in v schneidet, so ist vermöge des Pythagoriſchen Lehrſatzes §. 59. vy, die Seitenlinie eines Quadrats C, welches den Unterſchied der beiden gegebenen ausmacht.

§. 75.

60ſte Aufgabe.

Einen Kreis durch Conſtruction in ein Quadrat zu verwandln Fig. 91.

Auflöſung.

Man theile den Kreis durch zwei Linien ab und cd rechtwinklich in vier Quadranten, theile ferner den Durchmeſſer ef in acht gleiche Theile, und trage einen dergleichen Theil aus e nach a, aus f nach b, aus g nach c und aus h nach d, ſo geben die Punkte a, c, b, d, mit Linien verbunden, das Quadrat acbd, dem Flächeninhalte des Kreiſes genügend gleich.

§. 76.

61ſte Aufgabe.

Ein Quadrat in einen Kreis durch Conſtruction zu verwandeln Fig. 92.

Auflöſung.

Die Diagonale ad des gegebenen Quadrats wird in 10 gleiche Theile getheilt, und vier ſolcher Theile zum Halbmeſſer angenommen.

§. 77.

62ſte Aufgabe.

Einen halben Kreis adb in einen ganzen Kreis von gleichem Flächeninhalte cdmb Fig. 93. zu verwandeln.

Auflöſung.

Aus dem Mittelpunkte c, wird eine Perpendiculare cd

errichtet; ferner die Sehne bd gezogen und in e halbirt; endlich aus e durch b und d ein Kreis beschrieben, der dem Flächeninhalte des halben Kreises adb gleich ist.

§. 78.

63ste Aufgabe.

Einen Kreis abdm Fig. 94. **in einen halben Kreis von gleichem Flächeninhalte zu verwandeln.**

Auflösung.

Man ziehe den Durchmesser ad, errichte eine Perpendiculare cb aus dem Mittelpunkte c, lege durch b und d eine Linie, trage bd aus d nach e, und beschreibe über be den halben Kreis bfe, so ist derselbe dem Kreise abdm am Flächeninhalte gleich.

§. 79.

64ste Aufgabe.

Einen Quadranten banc **in einen halben Kreis durch Construction zu verwandeln** Fig. 95.

Auflösung.

Ueber der Sehne ac des gegebenen Quadranten wird ein halber Kreis amc beschrieben, wodurch letzterer mit den Quadranten banc gleichen Flächeninhalt erhält.

Zusatz. Mittelst der Anleitung der §phen 55 bis mit 79. ist es nun möglich, jede gegebene geradlinige Figur oder mehrere derselben, sowohl in einen Kreis als in Dreiecke, Quadrate oder Parallelogramme zu verwandeln.

Wäre z. B. ein Kreis in ein gleichschenkliches Dreieck von gleichem Flächeninhalte umzuformen, so finde man nach §. 75. ein Quadrat dem Kreise gleich, verwandele selbiges nach §. 64. in ein Dreieck und letzteres endlich nach §. 67. in ein gleichschenkliches Dreieck u. s. w.

Digitized by Google

Einige der vorzüglichsten Constructionen, den Kreis und die ihm zugehörigen Linien und Winkel betreffend.

§. 80.

Die hierher gehörigen Lehrsätze sind folgende:

1ster Lehrsatz.

Eine Linie, welche die Sehne eines Kreises rechtwinklich in zwei gleiche Theile theilt, theilt auch den ihr zugehörigen Bogen in zwei gleiche Theile und geht durch den Mittelpunkt des Kreises [§. 60.]. Sind daher zwei Sehnen zweier aneinander stoßender Bogen gegeben, so werden die Linien, welche die Sehnen rechtwinklich in zwei gleiche Theile theilen, sich im Mittelpunkte des Kreises schneiden.

§. 81.

65ste Aufgabe.

Zu dem Bogen abc Fig. 96. soll der Mittelpunkt des Kreises, zu welchen dieser Bogen gehört, gefunden, und der Bogen zu einem Kreise ergänzt werden.

Auflösung.

In dem gegebenen Bogen werden drei willkührliche Punkte a, b, c angenommen und die Sehnen ab und bc gezogen. Hierauf aus a und b mit beliebiger, doch gleicher Eröffnung des Zirkels, Bogen beschrieben, die sich in x und w, so wie aus b und c zwei, die sich in y und v schneiden. Nun verbinde man die Punkte x und w, y und v durch Linien, so ist ihr Durchschnittspunkt d der Mittelpunkt des Kreises, zu welchem der Bogen abc gehört, und ersterer kann nun mit dem Halbmesser da = dc ergänzt werden.

Digitized by Google

§. 82.

66ste Aufgabe.

Durch drei gegebene Punkte a, b und c, welche nicht in gerader Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben Fig. 97.

Auflösung.

Man verbinde a und b, so wie b und c durch Linien, betrachte dieselben als Sehnen eines Kreises, und theile sie durch vy und xw in zwei gleiche Theile, so ist ihr Durchschnittspunkt d der Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Setzt man nun den Zirkel in d und eröffnet ihn bis zu einem der drei gegebenen Punkte a, b oder c, so kann man mit dieser Eröffnung den Kreis beschreiben, dessen Peripherie durch die Punkte a, b und c gehen wird.

Zusatz. Dasselbe Verfahren ist anzuwenden, um durch die Eckpunkte eines Dreiecks einen Kreis zu ziehen. Auch kann man den verwischten Mittelpunkt eines gegebenen Kreises auf die nämliche Weise wieder auffinden.

§. 83.

2ter Lehrsatz.

Wenn zwei Winkel eines Dreiecks, mittelst zweier Linien in zwei gleiche Theile getheilt werden, so schneiden sich letztere in einem Punkte, der von den Seitenlinien des Dreiecks gleichweit absteht [§. 63.].

67ste Aufgabe.

Es soll um ein gegebenes Dreieck abc Fig. 98. ein Kreis beschrieben werden, der die Seitenlinien desselben berührt.

Auflösung.

Mit gleicher Eröffnung des Zirkels werden aus a, die Theile av = aw, und aus b, die Theile bm = bn ab-

Digitized by Google

geschnitten; ferner aus v und w, zwei Bogen mit einerlei Eröffnung des Zirkels beschrieben, die sich in x, und aus m und n zwei, die sich in y schneiden; endlich a und x, so wie b und y durch Linien verbunden, so gibt ihr Durchschnittspunkt d den Mittelpunkt des Kreises, in welchem die Perpendicularen de, df, dg als Halbmesser anzusehen sind.

§. 84.

3ter Lehrsatz.

Peripheriewinkel in einem Kreise, welche einen und denselben Bogen zwischen ihren Schenkeln haben, sind gleich groß [§. 65 u. 66.].

68ste Aufgabe.

Der Winkel abc ist gegeben, es sollen mehrere gleiche Winkel construirt werden, deren Schenkel die Punkte a und c treffen Fig. 99.

Auflösung.

Durch die Punkte a, b, c wird nach §. 82. ein Kreis gezogen, und in der Peripherie desselben so viel Punkte a, f ꝛc. angenommen, als durch a und c gleiche Winkel gelegt werden sollen, so geben die Schenkel em, en, fo und fp die verlangten gleichen Winkel ofp = men = abc.

§. 85.

4ter Lehrsatz.

Peripheriewinkel, die mit ihren Schenkeln auf den Endpunkten eines Durchmessers stehen, sind rechte Winkel [§. 67.].

69ste Aufgabe.

Es soll die Richtigkeit eines materiellen rechten Winkels geprüft werden Fig. 100.

Auflösung.

Nachdem mit willkührlichem Halbmesser ein Kreis be-

schrieben worden ist, ziehe man den Durchmesser ab; nehme einen beliebigen Punkt n in der Peripherie desselben, und lege durch n und a, n und b die Linien nm und nv, so ist mnv ein rechter Winkel, an dessen Schenkel die Catheten des materiellen Winkels angelegt werden können.

§. 86.

5ter Lehrsatz.

Der Berührungspunkt einer Tangente wird gefunden, wenn man einen Radius auf selbige rechtwinklich ziehet [§. 63.].

70ste Aufgabe.

An den Punkt a eines Kreises Fig. 101. soll eine Tangente gezogen werden.

Auflösung.

Man lege durch c und a die Linie cf, mache am = an, beschreibe aus m und n mit gleicher Eröffnung des Zirkels Bogen, die sich z. B. in x und y schneiden, und verbinde beide Punkte durch xy, so berührt letztere Linie den Kreis in a und ist eine Tangente desselben.

§. 87.

71ste Aufgabe.

Von einem Punkte a Fig. 102., außerhalb eines Kreises, zwei Tangenten zu ziehen und die Berührungspunkte zu bestimmen.

Auflösung.

Das Centrum c ist mit dem gegebenen Punkte a durch die Linie ca zu verbinden. Man theile sodann ac in e in zwei gleiche Theile, beschreibe aus e durch c den Bogen bcd, und ziehe die Linien ab und ad, so sind selbige Tangenten, die den Kreis in b und d berühren.

Digitized by Google

§. 88.

72ste Aufgabe.

Die Linie ab und ein Punkt d ist gegeben Fig. 103. Es soll ein Kreis beschrieben werden, welcher durch den Punkt d gehet, und zugleich die Linie ab berührt.

Auflösung.

Man theile ab, durch fg nach §. 20., in zwei gleiche Theile ac = cb; ziehe cd, und theile letztere Linie ebenfalls durch hi in zwei gleiche Theile, so ist der Durchschnittspunkt e von fg und hi, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, welcher mit ed = ec beschrieben die Linie ab in c berührt.

§. 89.

73ste Aufgabe.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher durch zwei gegebene Punkte a und b geht, und eine gegebene Linie cd berührt Fig. 104.

Auflösung.

Man lege durch a und b eine Linie, welche die gegebene cd in e schneidet; beschreibe über eb einen Halbkreis efb; errichte in a die Perpendiculare af, bis sie den Kreis in f schneidet; trage die Sehne ef aus e nach g, so ist g der Berührungspunkt. Wird endlich in g, so wie in i, als der Mitte von ab, eine Perpendiculare errichtet, so schneidet letztere kg in h als dem Mittelpunkt des Kreises, welcher durch a und b gelegt, die Linie cd in g berührt.

§. 90.

6ter Lehrsatz.

Kreise verhalten sich in Hinsicht ihres Flächeninhaltes, wie die Quadrate ihrer Durch- oder Halbmesser [§. 82.].

74ste Aufgabe.

Es sollen mehrere Kreise z. B. A, B, C Fig. 105. durch Construction, in einen, ihnen am Flächeninhalte gleichen Kreis, verwandelt werden.

Auflösung.

Man finde nach Anleitung des 71sten §ph. mittelst der Halbmesser a, b, c, die Seitenlinien eines Quadrats, welches so groß, als die Quadrate der Halbmesser a, b, c zusammen genommen ist, und beschreibe mit dem zuletzt gefundenen Halbmesser mn, den Kreis pqsm, so ist sein Flächeninhalt gleich der Summe der Flächeninhalte $A + B + C$.

Zusatz. Auf dieselbe Weise kann mit Hülfe des 74sten §ph. der Flächeninhalt eines kleinern Kreises von dem eines größern abgezogen; so wie mit Hülfe des 72sten §ph. der Flächeninhalt eines gegebenen Kreises durch Construktion vervielfältiget werden ꝛc.

Von dem Proportionalzirkel.

§. 91.

Der Proportionalzirkel ist ein von neueren Mathematikern zwar beseitigtes, für gegenwärtigen Zweck jedoch ein sehr nützliches Instrument, weshalb sein Gebrauch bei Auflösung einiger Aufgaben hier gezeigt werden soll.

75ste Aufgabe.

Eine Linie a'b' Fig. 106. mittelst des Proportionalzirkels, in eine beliebige Anzahl z. B. in sieben gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man suche die arithmetischen Linien auf beiden Schenkeln des Proportionalzirkels, welche gemeiniglich durch zwei Punkte oder mit L bezeichnet sind; fasse die Linie a'b' in

den Handzirkel, setze einen Fuß in den Punkt 7 auf eine der obigen Linien, eröffne den Proportionalzirkel, bis die zweite Spitze des Handzirkels in den 7ten Punkt des andern Schenkels eintrifft. In dieser Stellung lasse man selbigen und fasse mit dem Handzirkel die Weite 1;1, die sodann $\frac{1}{7}$ der Linie a'b' ausmacht.

Zusatz. Sollte die Linie a'b' z. B. in vierzehn gleiche Theile getheilt werden, so nehme man mit dem Handzirkel nur die halbe Länge von a'b' (weil die arithmetischen Linien gewöhnlich nur 10 Theile enthalten) und öffne den Proportionalzirkel, bis die Spitzen des Handzirkels auf beiden Schenkeln desselben in 7;7 zu stehen kommen, so ist die Entfernung 1;1 der vierzehnte Theil von der gegebenen Linie a'b'.

76ste Aufgabe.

Ein reguläres Vieleck, mittelst des Proportionalzirkels, in einem gegebenen Kreis zu beschreiben.

Auflösung.

Die Linie der Polygone ist gewöhnlich auf dem Proportionalzirkel mit POL bezeichnet. Sollte z. B. ein reguläres Fünfeck, in einem Kreis construirt werden, so nehme man den Halbmesser des gegebenen Kreises in den Handzirkel; öffne den Proportionalzirkel so lange, bis die Spitzen des ersteren, in die Punkte 6;6 Fig. 107. zu stehen kommen, wo alsdann für den gegebenen Kreis, die Entfernungen 4;4 die Seitenlinie des in denselben zu beschreibenden Vierecks, 5;5 die Seitenlinie des regulären Fünfecks u. s. w. bis zum Zwölfeck abgenommen werden können.

In Fig. 107. wäre für das reguläre Fünfeck, die Entfernung 5;5 auf der Peripherie des Kreises herumzutragen.

77ste Aufgabe.

Die Sehne jedes Winkels am Mittelpunkte

irgend eines Kreises z. B. die von 30° mittelst des Proportionalzirkels zu finden Fig. 108.

Auflösung.

Die Sehnenlinie ist auf den Schenkeln des Proportionalzirkels durch zwei eingegrabene Punkte bemerkt, die mit c bezeichnet sind. Soll z. B. die Sehne eines Winkels von 30° für einen gegebenen Kreis gefunden werden, so nehme man den Halbmesser des letzteren in den Handzirkel und öffne den Proportionalzirkel, bis die Spitzen des Handzirkels in die Punkte 60;60 zu stehen kommen, so zeigt die Entfernung von 30;30 die verlangte Sehne für dieses Gradmaß.

Zusatz. Auf diese Weise kann, wenn es verlangt wird, ein Kreis in halbe Grade d. i. in 720 gleiche Theile getheilt werden.

78ste Aufgabe.

Den Sinus jedes Winkels mittelst des Proportionalzirkels zu finden.

Auflösung.

Wenn aus dem Scheitelpunkte eines Winkels ein Kreis beschrieben und von dem Durchschnittspunkte des einen Schenkels, eine Perpendiculare auf den andern Schenkel gefällt wird, so heißt selbige der Sinus dieses Winkels oder des ihm zugehörigen Bogens.

Auf dem Proportionalzirkel sind die Sinuse für den Halbmesser C′D′ = C′E′ Fig. 108. angegeben und gewöhnlich mit S bezeichnet. Die Entfernungen C′,10; C′,20; C′,30 ꝛc. auf C′D′ und C′E′ Fig. 108. werden erhalten, indem man mit C′D′ in Fig. 109. einen Kreis beschreibt; den Quadranten AD in 9 gleiche Theile theilt und aus den Theilungspunkten 1; 2; 3; 4 ꝛc. auf den normalen Halbmesser AC Perpendicularen fällt. So ist

Die Perpendiculare

1;1 in Fig. 109. = C'10 in Fig. 108. = Sin : v. 10°
" " 2;2 " " = C'20 " " = " " 20°
" " 3;3 " " = C'30 " " = " " 30°
u. s. w.

79ste Aufgabe.

Ein Oval mittelst des Proportionalzirkels zu construiren Fig. 109.

Auflösung.

Man beschreibe mit der halben großen Axe AC des Ovals aus C einen Kreis, wovon in Fig. 109. die Hälfte befindlich ist; theile den Quadranten AD in 9 gleiche Theile und ziehe die Perpendicularen 9,9; 8,8; 7,7 ꝛc. Ferner nehme man die halbe kleine Axe des Ovals in den Handzirkel, setze den einen Fuß in 90° Fig. 108. und eröffne den Proportionalzirkel so lange, bis der andere Fuß ebenfalls, in 90° auf dem andern Schenkel zu stehen kommt, lasse letztern in dieser Stellung und trage die Eröffnung 90;90 Fig. 108. aus C nach 90 in Fig. 109. Eben so die Eröffnung 80;80 Fig. 108., aus 8 in 80, Fig. 109., so wie 70;70 aus 7 in 70 ꝛc., wodurch man 9 Punkte erhält, die, mit einer krummen Linie aus freier Hand verbunden, den vierten Theil einer Ellipse geben, die durch ein gleiches Verfahren, in den übrigen Quadranten, zu ergänzen ist.

80ste Aufgabe.

Die Peripherie eines Kreises mittelst der auf dem Proportionalzirkel befindlichen Tangentenlinie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Auflösung.

Auf dem Proportionalzirkel befinden sich gewöhnlich zwei Tangentenlinien, eine, welche zwei eingegrabene Punkte

Digitized by Google

mit T bezeichnet enthält, und eine andere, die blos mit T bezeichnet ist. Soll nun die Peripherie eines Kreises mittelst dieser Linien getheilt werden; so nehme man den Halbmesser des Kreises, setze den Handzirkel in 45 der einen Tangentenlinie und eröffne den Proportionalzirkel, bis der andere Fuß auf dieselbe Linie des andern Schenkels in 45 eintrifft, so ist in dieser Stellung jeder Grad des Kreises, bis zum 45sten zu bestimmen.

Zusatz. Mittelst der Tangentenlinie ohne eingegrabene Punkte, kann das Gradmaß der Bogen von 45 bis 75 gefunden werden, wenn man auf dieselbe Weise verfährt.

Von Eintheilung der Maßstäbe.

§. 92.

In §. 3. wurde bereits angeführt, was unter einem Maßstabe zu verstehen sey. Es gibt verschiedene Arten derselben, wovon nur die Verfertigung der gebräuchlichsten hier angeführt werden soll.

1. Einfache Maßstäbe.

Wenn mehrere gleiche Theile auf einer Linie aneinander getragen, und zur Fortsetzung der Eintheilung eine gewisse Anzahl derselben, wie in Fig. 110., zu einer Einheit verbunden werden, so heißt solches ein einfacher Maßstab

Nach der Eintheilung Fig. 110. beträgt die Linie cd; 53 und ef 68 Hunderttheile der Linie ab. Würde nun ab, zu einer Decimalruthe angenommen; so bezeichnet bm als $\frac{1}{10}$ ab, die Länge eines Fußes und jeder der kleinern Theilchen als $\frac{1}{100}$ ab, die Länge von einem Zolle u. s. w.

2. Von Transversal-Maßstäben.

§. 93.

Sollten die Theilungsstriche eines einfachen Maßstabes sehr nahe aneinander zu liegen kommen, so ist es vorzüg-

Digitized by Google

licher, mehrere Parallelen in gleicher Entfernung nebeneinander zu ziehen und die obern und untern Theilungspunkte mit schrägen d. i. Transversallinien zu verbinden, wie aus nachstehenden Aufgaben und ihren Auflösungen zu ersehen ist.

81ste Aufgabe.

Es soll ein Transversal-Maßstab gefertigt werden, von welchem jedes einzelne Zwölftheil einer zur Einheit angenommenen Linie af Fig. 111. abgenommen werden kann.

Auflösung.

Man ziehe die Linie ax, errichte in ihren Endpunkten a und x Perpendicularen, trage 6 gleiche Theile von beliebiger Größe aus a und x auf letztere und verbinde die gleichliegenden Punkte durch Linien; trage auf die obere und untere Parallele die zur Einheit gegebene Linie af, mehrere Male aneinander und verbinde die gegenüberliegenden Punkte 1,1; 2,2 ꝛc. durch Verticallinien, halbire den oberen Theil gh und verbinde den Theilungspunkt 6, mit den Endpunkten des untern Theiles. So beträgt die Länge bc $3\frac{1}{12}$ und de, $5\frac{8}{12}$ der Einheit af.

§. 94.

82ste Aufgabe.

Einen Ellen-Maßstab zu entwerfen, von welchem jeder einzelne Zoll abzunehmen ist.

Auflösung.

Es sey gh eine verjüngte Elle. Die Errichtung der Perpendicularen und Ziehung der sechs Parallelen mit ax Fig. 112. bleibt wie in voriger Aufgabe. Das übrige Verfahren ändert sich nur darin ab, daß die obere und untere Linie des ersten Theils, in vier gleiche Theile getheilt und, wie die Figur zeigt, auf und unterwärts mit Transversallinien verbunden werden. Deshalb würde die

Digitized by Google

Linie cd auf diesem Maßstabe, 2 Ellen 3 Zoll, und ef = 3 Ellen 15 Zoll betragen.

§. 95.

83ste Aufgabe.

Einen tausendtheilchen Maßstab aus einer gegebenen Linie ab Fig. 113. zu fertigen.

Auflösung.

Nachdem die Perpendicularen in den Endpunkten a und b errichtet worden sind, ziehe man, wie bei den vorhergehenden Maßstäben, 10 Parallelen in gleicher Entfernung, theile die erste und letzte in 10 gleiche Theile und verbinde die gegenüberliegenden Punkte durch verticale Linien. Die obere und untere Länge des ersten Zehntheils wird aufs Neue in 10 Theile getheilt und die Theilungspunkte mit schrägen oder Transversal-Linien verbunden.

§. 96.

84ste Aufgabe.

Eine gegebene Linie als Maßstab, in jede beliebige Anzahl Theile zu theilen, wenn selbige in drei Faktoren zerfällt werden kann. Es soll z. B. aus der Linie ab, ein Maßstab gefertiget werden, welcher ab in 72 gleiche Theile theilt Fig. 114.

Auflösung.

Die Zahl 72 läßt sich auf verschiedene Weise in drei Faktoren zerfällen; dieselben mögen $6 \times 4 \times 3$ seyn. Man errichte in den beiden Endpunkten a und b Perpendiculären; theile ab in so viel gleiche Theile, als der größte Faktor Einheiten enthält (hier in 6); trage auf jede Perpendiculare in a und b so viel Theile, als der zweite Faktor Einheiten hat (hier 4) und verbinde die gleichliegenden Punkte durch Parallelen. Wird endlich die erstere Abthei-

Digitized by Google

lung ac und gh in so viel gleiche Theile getheilt, als der dritte Faktor in sich begreift (hier in 3), so ist:

$$gh = ac = \frac{1}{3} ab$$
$$cd = \frac{1}{2} ac = \frac{1}{1\,3} ab$$
$$ef = \frac{1}{4} ih = \frac{1}{4} cd = \frac{1}{1\,2} ac = \frac{1}{7\,2} ab.$$

Von der Aehnlichkeit der Dreiecke und den vorzüglichsten Eigenschaften derselben.

§. 97.

Lehrsatz.

Wenn in zweien an Größe verschiedenen Dreiecken, die gleichliegenden Winkel gleich sind, so werden es ähnliche Dreiecke genennt.

Ziehet man deshalb in Fig. 115. mit der Seitenlinie AB die Linie ab parallel, so ist nach §. 24. (3) $\angle x = \angle y$; $\angle o = \angle u$ und der Winkel z sich selbst gleich, daher $\Delta abC \backsim \Delta ABC$. Zugleich ersiehet man aus Fig. 115., daß, indem die Parallele ab, durch den Theilungspunkt b des zweiten Drittels von BC gezogen worden ist, diese Linie aC, $\frac{2}{3}$ von AC abschneidet und ab = A2 ebenfalls $\frac{2}{3}$ von AB ist. Hieraus ergibt sich der

Lehrsatz.

In ähnlichen Dreiecken, wie ABC und abc Fig. 115., haben die gleichliegenden Seitenlinien ein gleiches Verhältniß gegeneinander. Es verhält sich nämlich: BC : bC = AC : ac = AB : ab = 3 : 2. Auch stehen die abgeschnittenen Stücken in Proportion, sobald mit der Seitenlinie eines Dreiecks eine Linie parallel gezogen wird z. B. Bb : bC = Aa : aC = 1 : 2.

Zusatz. Gemeiniglich geschiehet die Proportionirung der Seitenlinien ähnlicher Figuren, mittelst zweier an Größe verschiedenen Maßstäbe, wie PQ und pq Fig. 116.

Digitized by Google

§. 98.

Die Construction ähnlicher Dreiecke kann aber auf dreierlei Art geschehen:

1) Wenn den drei gleichliegenden Seitenlinien ein gleiches Verhältniß gegeben wird.

85ste Aufgabe.

Es sey PQ Fig. 116. der dem Dreiecke ABC zugehörige Maßstab. Man soll durch Proportionirung der gleichliegenden Seitenlinien, mit Hülfe des Maßstabes pq, ein ähnliches Dreieck abc zeichnen.

Auflösung.

Die Linie AC wird auf dem Maßstabe PQ gemessen und für ac dieselbe Anzahl Theile, vom Maßstabe pq genommen. Auf gleiche Weise proportionire man ab gegen AB, so wie bc gegen BC mittelst der beiden Maßstäbe und beschreibe aus a und c die Bogen op und mn, die sich in b schneiden, so ist nach §. 97. $\Delta abc \backsim \Delta ABC$.

§. 99.

2) Aehnliche Dreiecke werden erhalten, wenn man einen Winkel gleich macht und den beiden anliegenden Seitenlinien, einerlei Verhältniß gibt.

86ste Aufgabe.

Das Dreieck DEF, Fig. 117., sey gegeben. Es soll durch Gleichmachung des Winkels x und Proportionirung der Seitenlinien ED und EF nach den Maßstäben PQ und pq Fig. 116. das ähnliche Dreieck edf gezeichnet werden.

Auflösung.

Man mache den $\angle x = \angle X$, messe EF und ED auf dem Maßstabe PQ, nehme dieselbe Anzahl Theile von pq.

Digitized by Google

trage sie aus e nach d, so wie aus e nach f, und verbinde letztere Punkte durch die Linie df; so ist nach §. 97. und nach Fig. 115. Δdef ∽ ΔDEF.

§. 100.

3) Es entstehen ähnliche Dreiecke, wenn eine Seitenlinie in Proportion gesetzt wird, und die beiden anliegenden Winkel gleich gemacht werden.

87ste Aufgabe.

Mit dem Dreiecke GHI Fig. 118. ist ein ähnliches Dreieck ghi zu construiren, indem man die Linien HI und hi mittelst der Maßstäbe PQ und pq Fig. 116. proportionirt, und die anliegenden Winkel GHI und GIH, den Winkeln ghi und gih, gleich macht.

Auflösung.

Nachdem HI auf dem Maßstabe PQ gemessen und eben so viel Theile von pq für hi genommen worden sind, mache man ∠ghi = ∠GHI und ∠gih = ∠GIH. Es werden sich sodann beide Schenkel in g schneiden, und das Δghi nach Fig. 115. dem ΔGHI ähnlich seyn.

Die Auflösungen folgender Aufgaben beruhen auf den so eben angeführten Eigenschaften ähnlicher Dreiecke.

§ 101.

88ste Aufgabe.

Eine gegebene Linie a'b' Fig. 119. durch Construction in eine verlangte Anzahl gleicher Theile (z. B. in 7 Theile) zu theilen.

Auflösung.

Man ziehe an den Endpunkt a eine Linie ac unter einem willkührlichen Winkel cab, trage auf ac sieben gleiche

Theile von beliebiger Größe, verbinde c und b durch eine Linie und ziehe mit letzterer Parallelen aus den Theilungspunkten, so ist nach §. 97. am = $\frac{1}{7}$ von ab ꝛc. [§. 55. Aufg. 2.].

§. 102.

89ste Aufgabe.

Eine gegebene Linie a'b' Fig. 120. nach den an Größe verschiedenen Theilen einer andern Linie a'c', verhältnißmäßig zu theilen.

Auflösung.

Nachdem die Linie a'c' an ab = a'b' unter einem beliebigen Winkel aus a nach c angesetzt, und c mit b durch bc verbunden worden ist, lege man durch f und d die Parallelen fg und de, so verhält sich nach §. 97.

ad : df : fc = ae : eg : gb.

§. 103.

90ste Aufgabe.

Zu drei gegebenen Linien a'b', a'c' und b'd' Fig. 121. soll die vierte Proportionallinie durch Construction gefunden werden.

Auflösung.

Auf den Schenkel ax, wird die Linie a'b' aus a nach b, ferner a'c' aus a nach c und b'd' aus b nach d getragen; sodann b mit c durch eine Linie verbunden und mit letzterer, durch den Punkt d, die Parallele de gezogen, so verhält sich nach §. 97.

ab : ac = bd : ce.

§. 104.

91ste Aufgabe.

Eine gegebene Linie ab Fig. 122. soll in ihr inneres und äußeres Verhältniß getheilt

werden, nämlich, daß sich der erste Theil ac, zum zweiten cb, wie der zweite Theil cb, zur ganzen Linie ab verhält.

Auflösung.

Man errichte in dem Endpunkte a eine Perpendicularе, theile ab in zwei gleiche Theile am = mb und trage am aus a nach d, ziehe die Linie db, beschreibe mit ad aus a den Bogen ae, setze den Zirkel in b ein, eröffne ihn bis e und beschreibe den Bogen ec, so verhält sich:

ac : cb = cb : ab [§. 56. Aufg. 2.].

§. 105.

92ste Aufgabe.

Eine geradlinige Figur ABCDEF Fig. 123. ist gegeben. Man soll mittelst eines Proportionalwinkels eine ähnliche Figur verzeichnen, daß sich die Seitenlinien der gegebenen zu den Seitenlinien der zu findenden, wie m'n' zu n'q' verhalten.

Auflösung.

Man ziehe mz und mit m'n' aus m'' den Bogen n''x, trage auf selbigen n'q' als Sehne, aus n'' nach q'' und lege durch m'' und q'' die Linie m''y. Nun theile man die gegebene Figur ABCDEF in Dreiecke; fasse eine Diagonale z. B. BD im Zirkel, beschreibe mit ihr aus m'' den Bogen b''d'', so verhält sich:

m''d'' : b''d'' = m''n'' : n''q''

d. i. BD : bd = m'n' : n'q'.

Auf dieselbe Weise proportionire man die Linien BC und DC und construire mit den ihnen zugehörigen Sehnen b''d'', b''c'' und c''d'' das ähnliche Dreieck bdc. Dasselbe mit den Seitenlinien der übrigen Dreiecke vorgenommen und in gehöriger Ordnung angetragen, gibt die

Digitized by Google

ähnliche Figur abcdef, deren Seitenlinien sich insgesammt, wie m'n' zu n'q' verhalten.

§. 106.

93ste Aufgabe.

Eine geradlinige Figur ABCDEF, Fig. 124., aus einem innerhalb ihres Umfanges liegenden Punkte x verhältnißmäßig zu vergrößern oder zu verkleinern. Z. B. Es soll eine ähnliche Figur abcdef gezeichnet werden, deren gleichliegende Seitenlinien halb so groß als die gegebenen sind.

Auflösung.

Der Punkt, aus welchem die Theilung geschehen soll, sey x. Man ziehe aus selbigem Linien, in die Eckpunkte der Figur A, B, C, D, E, F und theile jede derselben in so viel Theile, als das gegebene Verhältniß besagt (hier in 2). Sollte hingegen jede Seitenlinie der verjüngten Figur, $\frac{2}{7}$ von CD seyn, so theile man Cx und Dx, Ex ꝛc. in 7 Theile und verbinde die Theilungspunkte der zweiten Siebentel, hier a, b, c, d ꝛc. durch Linien.

§. 107.

94ste Aufgabe.

Eine geradlinige Figur ABCDEF Fig. 125. aus einem außerhalb ihres Umfanges liegendem Punkte x, nach einem gegebenen Verhältnisse der gleichliegenden Seitenlinien, mit Beibehaltung ihrer Aehnlichkeit, zu verkleinern. Z. B. daß in Fig. 125. die Seitenlinien der letztern $\frac{2}{3}$ von den Seitenlinien der gegebenen Figur ausmachen.

Auflösung.

Wenn x zum Theilungspunkte angenommen ist, so

Digitized by Google

ziehe man aus selbigen, nach den Eckpunkten A, B, C, D, E, F Linien, theile jede wie Ax, Bx ꝛc. in drei gleiche Theile und verbinde die Theilungspunkte der zweiten Drittel z. B. a, b, c ꝛc. durch Linien, so ist unter obigem Verhältnisse abcdefg ∽ ABCDEF.

§. 108.

95ste Aufgabe.

Es soll die Entfernung zweier Gegenstände AB Fig. 126., zwischen welchen ein Hinderniß sich befindet, folglich AB nicht unmittelbar gemessen werden kann, durch Proportionirung der Seitenlinien AC und CB gefunden werden.

Auflösung.

Man nehme einen beliebigen Punkt C an, von welchem aus nach A und B gemessen werden kann; theile die Linie AC und CB in eine und dieselbe Anzahl gleicher Theile (hier wegen der ausspringenden Krümmung in 3), verbinde die Theilungspunkte des ersten Drittels a und b durch ab, messe letztere Linie, so ist ihr Maß, dreifach genommen, dem Maße der Linie AB gleich.

§. 109.

97ste Aufgabe.

Eine geradlinige Figur ABCDEF, Fig. 127., im verjüngten (d. i. verkleinerten) Maßstabe, jener ähnlich aufzutragen.

Auflösung.

Man theile die gegebene Figur durch die Diagonalen AC, CF und FD in Dreiecke; messe die Seitenlinien AB, BC, CD ꝛc., so wie die Diagonalen AC, CF, FD mittelst des Maßstabes PQ Fig. 116., nehme die Anzahl Theile jeder Linie von dem Maßstabe pq und construire

Digitized by Google

mit den proportionirten gleichliegenden Linien, die in der Ordnung folgenden Dreiecke abc, acf, cfd ꝛc., so ist abcdef ∽ ABCDEF.

Zusatz. Vorige Aufgabe läßt sich auch bequem folgendergestalt auflösen. Man fertige einen Proportionalmaßstab Tab. XIII. Fig. 194., indem man eine Linie AD zieht, darauf die größte Seitenlinie oder Diagonale Fig. 127. (hier AC) von A nach C, in Fig. 194, sodann die correspondirende Diagonale der zu verkleinernden Figur, hier ac Fig. 127. von C nach D in Fig. 194. aufträgt; in C die Perpendiculare BC willkührlich lang errichtet; die Seiten AB und BD und dann die Parallelen mit AD so enge wie möglich zieht. Nun nehme man z. B. die Seite AB Fig. 127. im Zirkel, fahre mit einem Fuße auf BC in Fig. 194. herunter, bis der andere Fuß in derselben Parallele die Linie AB berührt, auf dieser Parallele schlage man den Zirkel um, und verenge ihn bis auf BD, so hat man die verjüngte Seite ab der zu verkleinernden Figur, und so verfahre man mit allen übrigen, wodurch sich, wie vorhin, die verjüngte Figur abcdef auftragen läßt.

§. 110.

98ste Aufgabe.

Die Lage mehrerer gegebener Punkte A, B, C, D, E, F, G ꝛc. Fig. 128. mittelst eines geometrischen Netzes, nach den Maßstäben PQ und pq verhältnißmäßig zu verkleinern.

Auflösung.

Man begrenze die Punkte A, B, C, D ꝛc. in (I.) Fig. 128. durch ein Rechteck VWXY, nehme von dem dazu gehörigen Maßstabe PQ, eine beliebige Anzahl (gewöhnlich 10 oder 100) gleicher Theile, trage sie auf VY und VW von V aus, so vielmal als es geschehen kann, aneinander, und ziehe mit VY und VW, die Parallelen

1, 1; 2, 2; 3, 3 ꝛc., so fallen sämmtliche Punkte entweder in die Quadrate oder auf ihre Umfangslinien.

Das Netz vwxy in (II) wird mit Hülfe des Maßstabes pq auf obige Weise entworfen und sowohl 4y als 3w, die Anzahl Theile, gegeben, welche 4Y und 3W in I auf dem Maßstabe PQ einnahmen. Endlich werden durch die Punkte 1, 2, 3 ꝛc. die Parallelen mit vy und vw gezogen.

Soll nunmehr der Punkt A aus (I) verhältnißmäßig in das Netz (II) übertragen werden, so ziehe man durch A die Parallelen ab und cd mit VW und VY; messe die Entfernung Va und Vc nach dem Maßstabe PQ; nehme von pq dieselbe Anzahl Theile und trage sie in (II) aus v nach a′ und c′; ziehe endlich a′b′ und c′d′ mit vy und vw gleichlaufend, so gibt der Durchschnittspunkt beider Linien die verhältnißmäßige Lage des Punktes A′ in (II).

Auch läßt sich die Lage der Punkte z. B. des Punktes B′ in (II) auf folgende Weise bestimmen: Man setze den Zirkel in B Fig. (I) und beschreibe einen Bogen pq, der die Linie 1; 1 berührt; messe diese Entfernung auf PQ; nehme eben so viel Theile von pq und trage sie in (II) aus g′ nach e′. Mit der Entfernung fe in (I) verfahre man auf gleiche Weise, indem man aus B, den Bogen rs beschreibt; nehme das erhaltene Maß vom Maßstabe pq, trage es auf die mit vy gezogene Parallele e′f′ in (II), und untersuche zur Prüfung des Verfahrens, ob gegenwärtig die Entfernung A′B′ in (II) eben so viel Theile von pq als AB in (I) von PQ enthält.

Bei dem Eintragen krummer Linien wie DmnE Fig. (I) in das verjüngte Netz (II) verbinde man die Punkte D und E durch eine gerade Linie; errichte in den höchsten und niedrigsten Abständen der krummen Linie, Perpendicularen auf DE; messe die Entfernungen (Abscissen) Dk, Dl und die ihnen zugehörigen Perpendicularen (Ordinaten) km, ln auf PQ; gebe, nachdem D′ und E′ in (II) auf

obige Weise verhältnißmäßig eingetragen, und durch die Linie D'E' verbunden worden sind, den gleichnamigen Abscissen und Ordinaten in (II) eine gleiche Anzahl Theile vom Maßstabe pq und verbinde die gefundenen Punkte D'm'n'E' mittelst einer krummen Linie, so wird letztere eine nach den Maßstäben PQ und pq proportionirte ähnliche krumme Linie mit DmnE in Fig. (I) bilden.

§. 111.

Lehrsatz.

Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seitenlinien [§. 57.].

Beweis.

Man theile jede Seitenlinie des Dreiecks abc Fig. 129. in eine gleiche Anzahl Theile (hier in 4) und verbinde die Theilungspunkte durch Linien, welche mit denen des Δabc, eine parallele Lage haben, so entstehen die Dreiecke hbi, hfk, hki ꝛc., die unter sich ähnlich gleich und dem Δabc ähnlich sind.

Wird die Seitenl. bi des Δhbi = 1 gesetzt, so ist das
□ bmoi = 1 × 1 = 1
. . . bg . Δbfg = 2 gesetzt, so ist das
□ brtg = 2 × 2 = 4
. . . be . Δbde = 3 gesetzt, so ist das
□ bqve = 3 × 3 = 9
. . . bc . Δbac = 4 gesetzt, so ist das
□ bwxc = 4 × 4 = 16

Weil aber auch der Inhalt des Δfbg = 4 Δhbi
und . . . . Δbde = 9 Δhbi
. . . . Δbac = 16 Δhbi,

so verhalten sich die Flächeninhalte der Dreiecke bhi; bfg; bde; bac wie die Quadrate der Seitenlinien bi; bg; be; bc.

Digitized by Google

§. 112.

99ste Aufgabe.

Das Dreieck abc ist gegeben. Es soll ein ähnliches Dreieck von einem dreimal so großen Flächeninhalte Fig. 130. construirt werden.

Auflösung.

Man betrachte ab als die Seitenlinie eines Quadrats und finde nach §. 72. die Seitenlinie fg eines andern, welches dreimal so groß als das erstere ist, indem ed und df = ab; ferner dg = ef gemacht und ef gezogen wird; verlängere die Seitenlinien ba und bc und trage gf aus b nach h. Endlich ziehe man mit ac eine Parallele hi durch h, so ist nach dem vorhergehenden §ph, der Flächeninhalt des ähnlichen Δ hbi, dreimal so groß als der vom Δ abc.

§. 113.

100ste Aufgabe.

Ein gleichseitiges Dreieck abc Fig. 131. soll am Flächeninhalte verdoppelt werden.

Auflösung.

Die Seitenlinie des gegebenen gleichseitigen Dreiecks wird auf die beiden Catheten eines rechten Winkels aus d nach e und f getragen, und mit der Hypotenuse ef das gleichseitige Dreieck efg beschrieben, welches daher nach §. 111 u. §. 72. einen doppelt so großen Inhalt als abc hat.

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, daß auf dieselbe Weise und mit Hülfe des 72. §ph, der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks drei, vier, fünfmal ꝛc. so groß, als ein anfänglich gegebenes, gemacht werden kann.

§. 114.

101ste Aufgabe.

Der Flächeninhalt der geradlinigen Figur

ABCDE Fig. 132. soll, mit Beibehaltung der Aehnlichkeit, halb so groß gemacht werden.

Auflösung.

Man wähle zur Proportionirung des Flächeninhaltes eine der Seitenlinien oder Diagonalen z. B. BC; halbire dieselbe in F; trage CF auf die beiden Schenkel des rechten Winkels aus y nach b und c, so ist vermöge §. 73., bc die Seitenlinie eines Quadrats, welches der Hälfte vom Flächeninhalte des mit BC beschriebenen Quadrats gleich kommt.

Weil sich nun die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke, wie die Quadrate der gleichliegenden Seitenlinien verhalten, so beschreibe man mit BC aus v, den Bogen c's; trage die gefundene Linie bc aus c' nach b', wo mittelst der, durch v und b' gezogenen Linie, ein Proportionalwinkel entsteht, nach welchem die gleichliegenden Linien der Figur abcde, nach ABCDE proportioniret und gehörig aneinander getragen werden können.

Zusatz. Wollte man mit der Figur ABCDE, eine ähnliche Figur zeichnen, deren Flächeninhalt $\frac{1}{4}$ mal so groß als der von ABCDE seyn soll; so theile man eine Seitenlinie oder Diagonale z. B. BC in so viel gleiche Theile, als der Nenner des Bruches besagt (hier in 4) und trage in Fig. 133. so viel Theile an $B'C' = BC$, als der Zähler Einheiten enthält (hier 3) von c' nach G; beschreibe über $(B'C' + C'G)$ einen halben Kreis GHB'; errichte in dem Zusammenstoßungspunkte C', die Perpendiculare C'H, so ist letztere die verhältnißmäßige gleichliegende Seitenlinie, die einer ähnlichen, am Inhalte $\frac{1}{4}$ mal so großen Fläche, wie ABCDE angehört. Das übrige Verfahren bleibt das vorige.

Digitized by Google

Von Theilung der Flächen durch Construction.

I) Theilung der Dreiecke.

§. 115.

Lehrsatz.

Dreiecke von gleichen Höhen verhalten sich in Hinsicht ihres Inhaltes, wie ihre Grundlinien und wenn sie gleiche Grundlinien haben, wie ihre Höhen [§. 49.].

102te Aufgabe.

Von dem Dreiecke abc Fig. 134. sollen $\frac{4}{5}$ seines Inhaltes, mittelst einer durch den Scheitelpunkt b gelegten Linie abgeschnitten werden.

Auflösung.

Die dem Punkte b gegenüberliegende Seitenlinie ac wird in 5 gleiche Theile ad = de = ef ꝛc. getheilt und aus b nach g die Theilungslinie bg gezogen. Denn hierdurch erhalten die Dreiecke abc und abg einerlei Höhe, und es verhalten sich ihre Inhalte wie die Grundlinien ag : ac, das ist wie 4 : 5.

§. 116.

103te Aufgabe.

Ein Dreieck in eine gewisse Anzahl gleicher Theile zu theilen, so, daß sämmtliche Theilungslinien, in dem Punkte d einer Seitenlinie Fig. 135. zusammen treffen.

Auflösung.

Die Seitenlinie ab, in welcher der gemeinschaftliche Theilungspunkt d liegt, wird in so viel gleiche Theile ge-

Digitized by Google

theilt, als das Dreieck erhalten soll (hier in 4). Man ziehe die Linie cd, so ist Δ adc nach vorhergehender Aufgabe, $\frac{1}{4}$ und Δ dbc = $\frac{3}{4}$ des Dreiecks acb. Wird nun ferner die Seitenlinie bc in drei gleiche Theile getheilt und aus d nach den Theilungspunkten g und h Linien gezogen, so ist Δ dhc = Δ dhg = Δ dgb = $\frac{1}{3}$ des Dreiecks dcb, oder welches gleichviel, $\frac{1}{4}$ des Dreiecks abc.

§. 117.

104te Aufgabe.

Ein Dreieck in mehrere gleiche Theile zu theilen, wovon jeder einen besondern in den Seitenlinien liegenden Theilungspunkt erhalten soll. Z. B. das Δ abc Fig. 136. auf diese Weise, in fünf gleiche Theile.

Auflösung.

Man theile eine der drei Seitenlinien z. B. ac in 5 gleiche Theile und ziehe aus b nach dem ersten Theilungspunkte e die Linie be, so ist nach §. 115. Δ ebc = $\frac{1}{5}$ und Δ aeb = $\frac{4}{5}$ des Dreiecks abc. Theilt man ferner die Linie ab in vier gleiche Theile und ziehet ef, so ist Δ bef = $\frac{1}{4}$ des Dreiecks aeb = $\frac{1}{5}$ des Dreiecks abc und Δ afe = $\frac{3}{5}$ vom Dreiecke abc. Durch Eintheilung der Linie ae, in drei gleiche Theile und Ziehung der Linie fd, ist Δ dfe = $\frac{1}{3}$ des Dreiecks afe = $\frac{1}{5}$ des Dreiecks abc und Δ adf = $\frac{2}{5}$ des Dreiecks abc. Wenn endlich af in zwei gleiche Theile getheilt und gd gezogen wird, erhält man

Δ adg = Δ gdf = $\frac{1}{2}$ Δ adf = $\frac{1}{5}$ Δ abc.

§. 118.

105te Aufgabe.

Ein Dreieck abd Fig. 137. aus einem innerhalb desselben liegenden Punkte c in drei gleiche Theile zu theilen.

Digitized by Google

Auflösung.

Eine der Seitenlinien z. B. ad wird in drei gleiche Theile af = fg = gd getheilt. Man verbinde sodann f und g mit c durch fc und gc; ziehe mit cf durch b, die Parallele be und mit cg die Parallele bk, bis sie ad in e und k schneiden, so sind ce und ch die verlangten Theilungslinien. Denn nach §. 115. ist Δabf = $\frac{1}{3}$ des Dreiecks abd und nach §. 58., Δecf = Δbcf. Weil nun (abcf — Δbcf) = Δabf = $\frac{1}{3}$ des Dreiecks abd; so ist auch (abcf — Δecf) = abce = $\frac{1}{3}$ des Dreiecks abd. Auf gleiche Weise ist Δgbd = $\frac{1}{3}$ des Dreiecks acd und Δbcg = Δgck; folglich (gcbd — Δbcg) = Δgbd = $\frac{1}{3}$ des Dreiecks abd; also auch (gcbd — Δgch) = kcbd = $\frac{1}{3}$ des Dreiecks abd. Das Δabd ist demnach aus c, in die gleichen Theile abce, eck und kcbd eingetheilt.

§. 119.

106te Aufgabe.

Ein Dreieck Fig. 138. in vier Theile zu theilen, welche sich in Hinsicht ihres Flächeninhaltes wie 2, 3, 4, 5 verhalten.

Auflösung.

Am Endpunkt B des Dreiecks ABC, wird eine Linie BG unter beliebigem Winkel CBG gezogen, und aus B auf ihr so viel gleiche Theile getragen, als die Summe (2 + 3 + 4 + 5) = 14 beträgt; wovon der Theil BD = 2; DE = 3; EF = 4 und FG = 5 erhält. Man verbinde die Punkte C und G durch eine Linie und ziehe mit letzterer aus D, E, F Parallelen DH, EK, FL, so ist nach §. 102. BC ebenfalls nach diesem Verhältnisse eingetheilt. Verbindet man endlich H, K, L mit A durch Linien, so berhalten sich nach §. 115. die Inhalte der Dreiecke

BAH : HAK : KAL : LAC = BH : HK : KL : LC

wie 2 : 3 : 4 : 5.

Digitized by Google

§. 120.

107te Aufgabe.

Ein Dreieck fzp Fig. 139. in zwei Theile zu theilen, so, daß die Theilungslinie, durch einen in der Seitenlinie fz liegenden Punkt a geht, und die Theile selbst sich z. B. wie 1 : 4 verhalten.

Auflösung.

Man verbinde a und p, durch die Linie ap; verlängere fp; ziehe ferner durch z mit ap, die Linie ze parallel und lege durch a und e die Linie ae, so ist das Δ azp = Δ ape, folglich auch Δ fap + Δ ape = Δ fap + Δ azp oder Δ afe = Δ fzp. Man theile nunmehr die Linie fe in so viel gleiche Theile, als die Summe der gegebenen Verhältnißzahlen beträgt (hier in (4+1) = 5), ziehe aus a nach g die Linie ag, so ist Δ fag = $\frac{1}{5}$ des Dreiecks fae = $\frac{4}{5}$ des Dreiecks fzp. Es bestehet aber Δ fag aus dem Vierecke faup + dem Δ pug, welches letztere außerhalb des Dreiecks fzp liegt. Damit nun dessen Flächeninhalt in das Δ fzp zu liegen komme, ziehe man durch g mit ap die Parallele gt und verbinde den Anschnittspunkt t mit a, durch at, so ist Δ tpg = dem Δ atg; von beiden das Δ tug hinweggenommen, bleibt Δ pug = Δ aut übrig, und es ist:

Viereck faup + Δ pug = Viereck faup + Δ aut,

oder welches einerlei, Δ fag = Viereck fatp = $\frac{1}{5}$ des Dreiecks fzp, und daher Δ azt = $\frac{1}{5}$ desselben, folglich verhalten sich beide Theile wie 1 : 4.

§. 121.

108te Aufgabe.

Ein Dreieck abc Fig. 140. in zwei gleiche Theile zu theilen, so, daß die Theilungslinie mit einer Seitenlinie z. B. mit bc parallel läuft.

Digitized by Google

Auflösung.

Man beschreibe über bc, mit welcher die Theilungslinie parallel seyn soll, einen halben Kreis bhc; theile denselben durch fg in h, in zwei gleiche Theile, so ist die Sehne bh = hc und nach §. 59 und §. 85. □ bh = ½ □ bc. Ferner mache man bk = bh und ziehe durch k mit ab, die Parallele ke, bis sie ac in e schneidet, als auch durch e mit bc die Parallele de, so ist nach §. 111. Δ ade folglich auch das Trapezium bdec die Hälfte des Dreiecks bac.

§. 122.

190ste Aufgabe.

Ein Dreieck abc Fig. 141. mit ac parallel in mehrere z. B. in 4 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Durch den Scheitelpunkt b, wird auf eine der Seitenlinien z. B. auf ab, die Linie xy normal gezogen; ferner ab in so viel gleiche Theile getheilt, als das Dreieck erhalten soll (hier in 4,bd = de = ef = fa). Man trage nunmehr ab aus b nach k, und die gleichen Theile bd, de, ef ꝛc. aus b nach h, g und n ꝛc.; beschreibe über hk, gk, nk ꝛc. Halbkreise, welche die Seitenlinie ab in p, q, r ꝛc. schneiden und ziehe durch letztere Punkte mit ac, die Parallelen pt, qu, rv; so theilen selbige das Δ abc, in die vier gleichen Theile bpt; ptqu, qurv und rvac.

Denn nach §. 61. ist das Parallelogram, welches mit hb und bk beschrieben wird = dem Quadrate von bp. Es ist aber hb = ¼ ab und bk = ab, daher das Quadrat von bp = ¼ des Quadrats von ab.

Eben so ist das mit bg und bk beschriebene Rectangel = dem Quadrate von bq; weil nun bg = ¾ ab und bk = ab, so ist:

das □ von bq = ¾ des □ ab.

Eben so das □ von br = ½ des □ ab.

Digitized by Google

Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich aber nach §. 111. wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seitenlinien, nämlich:

$$\Delta bpt : \Delta bqu : \Delta brv = \square bp : \square bq : \square br,$$

also auch

$$\Delta bpt : \Delta bqu : \Delta brv = \tfrac{1}{4} \square ab : \tfrac{2}{4} \square ab : \tfrac{3}{4} \square ab,$$

oder welches gleichviel

$$\Delta bqt : \Delta bqu : \Delta brv = \tfrac{2}{4} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{3}{4}.$$

§. 123.

110te Aufgabe.

Ein Dreieck abc Fig. 142. in mehrere gleiche Theile (z. B. in 4) zu theilen, daß die Theilungslinien rechtwinklig auf der Grundlinie stehen.

Auflösung.

Die Linie ac, auf welcher die Theilungslinien rechtwinklig errichtet werden sollen, theile man in die verlangte Anzahl gleicher Theile (hier in 4). Errichte ferner in den Endpunkten a und c, die Perpendicularen xy und vw; ziehe bn normal auf ac; trage die Theile c3, c2, welche rechts von bn fallen, aus c nach q und u; so wie die links liegenden (hier a1) aus a nach o; desgleichen cn aus n nach r und an aus a nach p; beschreibe über ru, rq und po Halbkreise, so werden selbige ac in s, l und f schneiden und die Punkte bezeichnen, aus welchen Perpendicularen zu errichten sind, die das Δabc in vier gleiche Theile theilen. Der Beweis ist dem in der vorigen Aufgabe gleich.

§. 124.

111te Aufgabe.

Ein Dreieck mit der Richtung einer gegebenen Linie xy Fig. 143. z. B. das Δabc, in drei gleiche Theile zu theilen.

Digitized by Google

Auflösung.

Die Construction ändert sich von jener der vorigen Aufgabe nur darin ab, daß durch b mit xy, die Parallele bs gezogen und cs aus c nach k, ferner as aus a nach h, c2 aus c nach l und a1, aus a nach i, getragen; endlich die Halbkreise beschrieben und durch die gefundenen Punkte g und r, die Theilungslinien fg und ru, mit xy parallel gelegt werden.

§. 125.

112te Aufgabe.

Ein Dreieck abc Fig. 144. so zu theilen, daß sich die erhaltenen Abschnitte, wie die Theile einer gegebenen Linie z. B. wie $i'k' : k'l' : l'm' : m'c'$ verhalten, und die Theilungslinien, unter einer der vorhergehenden Bedingungen, gleichlaufend sind (hier sollen sie auf ac normal stehen).

Auflösung.

Man ziehe an c die Linie cx, unter einem beliebigen Winkel acx; trage $c'm'$ aus c nach m; $c'l'$ aus c nach l ꝛc.; verbinde a und i durch ai und ziehe mit letzterer kn, lo, pm parallel, so ist ac nach §. 102. in die verhältnißmäßigen Theile an, no, op, pc eingetheilt. Das übrige Verfahren ist dem vorhergehenden gleich.

§. 126.

113te Aufgabe.

Ein Dreieck abc Fig. 145. aus einem in einer Seitenlinie liegenden Punkte d, in mehrere (z. B. in 3) gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Die Linie, in welcher der gegebene Punkt d liegt, wird in so viel gleiche Theile getheilt, als das Dreieck er-

Digitized by Google

halten soll (hier in drei ae = ef = fc). Werden aus dem gegenüberliegenden Punkte b nach e und f Linien gezogen, so ist Δ abe = Δ ebf = Δ fbc = ⅓ Δ abc. Man verbinde ferner b und d durch die Linie bd; ziehe mit ihr aus e und f Parallelen, bis sie bc in g und h schneiden, so sind gd und dh die verlangten Theilungslinien. Denn:

Δ bde = Δ bgd
Δ abd = Δ abd

folglich Δ abe = Δ abd + Δ bde = Δ abd + Δ bgd = dem Viereck abgd = ⅓ Δ abc u. s. w.

II) Theilung der Parallelogramme.

§. 127.

114te Aufgabe.

Das Parallelogram abcd Fig. 146. soll mit der Seitenlinie ab parallel in 4 gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung.

Man zerlege die obere und untere parallele Seite bc und ad in 4 gleiche Theile und verbinde die gegenüberliegenden Punkte d und f; g und h ꝛc. durch Linien, so haben die Parallelogramme abdf, fdgh ꝛc. gleiche Grundlinien und Höhen, also auch nach §. 57. gleiche Flächeninhalte.

§. 128.

115te Aufgabe.

Ein Parallelogram abcd Fig. 147. aus einem der Eckpunkte z. B. aus b in mehrere (hier in 3) gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Die gegenüberliegenden Eckpunkte des Parallelograms werden durch Diagonalen verbunden; ac in drei gleiche Theile ae = ef = fc getheilt und durch e und f mit bd die

Digitized by Google

Parallelen eg und fh gezogen, bis selbige die Seitenlinien des Parallelograms in g und h schneiden. Werden endlich aus b nach g und h die Theilungslinien bg und bh gelegt, so ist:

$\Delta abe + aed = \Delta bef + edf = \Delta bfc + dfc = \frac{1}{3}$ Parallelogram abcd, oder

$abed = debf = dfbc = \frac{1}{3}$ des Parall. abcd.

Nun ist $\Delta ebd = \Delta gbd$ und

$abed = \Delta abd - \Delta ebd = abd - \Delta gbd = abg = \frac{1}{3}$ des Parall. abcd ꝛc.

§ 129.

116te Aufgabe.

Ein Parallelogram abcd Fig. 148. aus einem innerhalb desselben angenommenen Punkte x in eine Anzahl gleicher Theile (z. B. in 3) zu theilen.

Auflösung.

Man zerlege die obere und untere Seite bc und ad in so viel gleiche Theile, als das Parallelogram erhalten soll (hier in 3) und verbinde die gegenüberliegenden Punkte f, e und h, g durch Linien, so ist $abfe = efhg = ghcd = \frac{1}{3}$ des Parallelograms abcd. Man ziehe ferner die Linien ex, fx, hx und gx; lege durch e mit fx die Parallele ei und durch g mit hx die Parallele gk, so werden die Punkte i und k bestimmt, welche mit x verbunden in dem Parallelogram abcd die drei gleichen Theile abixe; ixk und exkcd abschneiden.

Denn es ist $\Delta fix = \Delta efx$. Folglich die Figur $abfxe - \Delta fix = abfxe - \Delta efx = abfe = \frac{1}{3}$ abcd.

Ferner ist

$abhg = abhxg + \Delta gxh = abhxg + \Delta hxk = \frac{2}{3}$ abcd.

Es bleibt daher für die Figur exkcd der dritte Theil des Parallelograms abcd übrig.

Digitized by Google

§. 130.

117te Aufgabe.

Ein Parallelogram aus einem, in einer Seitenlinie liegenden Punkte x in mehrere z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen Fig. 149.

Auflösung.

Die obere und untere Seite wird in 5 gleiche Theile zerlegt, und weil in Fig. 149., der erste Theil abgf, links des gegebenen Punktes x fällt, so schneide man mittelst gf, das erste Fünftel abfg für sich besonders ab, verbinde x und f durch die Linie xf; ziehe mit letzterer durch g die Parallele ge und vereinige x und e durch xe, so ist:

$$abfg = abfx - \Delta gxf = abfx - \Delta exf = \tfrac{1}{5}\ abcd.$$

Um die übrigen $\frac{4}{5}$ abzuschneiden, ziehe man die Diagonalen cx und ed; theile de in vier gleiche Theile; ziehe die Linien xh, xi, xk, ch, ci, ck; so ist

$$echx = hcix = ickx = kcdx.$$

Man lege nun mit cx durch die Punkte h, i, k die Parallelen hl, im, kn und verbinde die Punkte l, m, n mit x, durch lx, mx, nx, so ist der Theil

$$abex = exl = lxm = mxn = nxd.$$

Denn das $\Delta hxc = \Delta lxc$.

Weil nun $\Delta exc - \Delta hxc = \frac{1}{5}$ Parall. abcd,

so ist auch $\Delta exc - \Delta lxc = \Delta exl = \frac{1}{5}$ desselben.

Eben so ist $\Delta ixc = \Delta mxc$,

folglich $\Delta exc - \Delta ixc = \Delta exc - \Delta mxc = \frac{1}{5}\ abcd$ u. s. w.

III) Theilung der Trapeze.

§. 131.

118te Aufgabe.

Ein Trapezium in mehrere gleiche Theile zu theilen, daß die Theilungslinien, die parallel laufenden des Trapezes, schneiden. Z. B.

Digitized by Google

das Trapezium abcd Fig. 150. soll unter obiger Bedingung in drei gleiche Theile getheilt werden.

Auflösung.

Man zerlege jede der Parallelen bc und ad in so viel gleiche Theile, als das Trapezium erhalten soll (hier in 3) und verbinde die gegenüberliegenden Punkte durch eg und fh.

Denn Δ beg $=$ Δ efh $=$ Δ fcd
Δ abg $=$ Δ egh $=$ Δ fhd } nach §. 57.

Mithin Δ beg + abg $=$ Δ efh + egh $=$ Δ fcd + fhd

d. i. abeg $=$ gefh $=$ hfcd.

§. 132.

119te Aufgabe.

Ein Trapezium aus einem Eckpunkte b, Fig. 151., in verlangte (z. B. in 5) gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Nachdem die Diagonalen ac und bd gezogen worden sind, theile man ac, weil sie dem Punkte b gegenüber liegt, in die verlangte Anzahl gleicher Theile (hier in 5); ziehe mit der Diagonale bd Parallelen hm, gl, fk und ei durch die Theilungspunkte, und verbinde die Anschneidungspunkte m, l, k; i mit b vermittelst der Theilungslinien bi, bk, pl und bm.

Denn Fig. abed $=$ $\frac{1}{5}$ des Trapezii abcd
und Δ bed $=$ Δ bid, daher
Δ abd $-$ Δ bed $=$ Δ abd $-$ bid,
d. i. Fig. abed $=$ Δ abi $=$ $\frac{1}{5}$ des Trapezii abcd u. s. w.

§. 133.

120ste Aufgabe.

Ein Trapezium abcd Fig. 152. aus einem

innerhalb desselben befindlichen Punkte x, in eine Anzahl (z. B. in 3 gleiche) Theile zu theilen.

Auflösung.

Die obere und untere parallele Seite wird, wie in vorhergehenden Aufgaben, in obige Anzahl gleicher Theile getheilt und die gegenüberliegenden Punkte e, g und f, h mit Linien verbunden. Man ziehe aus dem gegebenen Punkte x nach e, f, g, h Linien und mit gx und hx die Parallelen ei und fk, so ergeben sich die Anschneidungspunkte i und k, welche mit den Theilungslinien ix, ex, kx zu verbinden sind.

Denn aceg ist = Fig. caexg — Δ egx = caexg — Δ igx
= caexi = $\frac{1}{3}$ cbcd.

Ferner ist Δ fxh = Δ xhk, daher

cafh = Fig. cafxh + Δ fxh = cafxh + Δ xhk = $\frac{2}{3}$ abcd.

Folglich fxkdb = $\frac{1}{3}$ abcd.

§. 134.

121ste Aufgabe.

Ein Trapezium abcd Fig. 143. mit der Grundlinie parallel, in mehrere z. B. in 3 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man mache gc = ad, ferner ae = (ad + bc), theile ae in so viel Theile, als das Trapezium erhalten soll (hier in 3); trage $\frac{1}{3}$ ae aus b nach h; theile hg in f in zwei gleiche Theile hf = fg; errichte in b eine Perpendiculare xy; durchschneide dieselbe aus f mit fh in i; nehme bc im Zirkel; setze die Spitze in i und durchschneide bc in k. Endlich ziehe man durch k mit ab, die Parallele km und lege durch m, die Linie lm, mit ad parallel, so ist bclm = $\frac{1}{3}$ abcd.

Digitized by Google

Eben so wird mit $\frac{1}{3}$ ae verfahren, weshalb man diese Länge aus b nach n trägt, sodann ng in o halbirt und mit no aus o die Linie bx in p, so wie mit bc aus p die Linie bc in s schneidet. Eine Parallele durch s mit ab gelegt, gibt den Durchschnittspunkt r, von welchem aus, die Parallele qr mit ad den Theil bqrc als $\frac{1}{3}$ des Trapezes abcd abschneidet, so daß für qadr $\frac{1}{3}$ desselben übrig bleibt.

Der Beweis hiervon und von der folgenden Auflösung ist analytisch zu führen, und im dritten Theile von Mayers praktischer Geometrie §. 307. nachzulesen.

§. 135.

122ste Aufgabe.

Ein Trapezium abcd Fig. 154. dessen obere Parallele kleiner als die untere ist, in mehrere z. B. in 3 gleiche Theile zu theilen, die mit der obern und untern Seite gleichlaufend sind.

Auflösung.

Nachdem die obere Parallele bc an die untere ad bis e angetragen ist, theile man ae in so viel gleiche Theile, als das Trapezium erhalten soll (hier in 3); verlängere die obere Seite bc rechts und links; trage $\frac{1}{3}$ ae, aus b nach f und ad aus c nach g; theile fg in h in zwei gleiche Theile und durchschneide mit gh aus h, die durch b gefällte Perpendiculare in i; fasse ic im Zirkel und beschreibe den Bogen ik. Durch k ziehe man mit der Seitenlinie cd, die Parallele kl und endlich durch l mit ad, die Theilungslinie lm gleichlaufend, so ist das Trapezium lbcm $= \frac{1}{3}$ abcd.

Um das zweite Drittel abzuschneiden, trage man $\frac{2}{3}$ ae von b nach n; theile ng in o in zwei gleiche Theile go = on; durchschneide damit aus o die Perpendiculare in p; beschreibe mit pc einen Bogen, wodurch die ver-

längerte Linie bc in s geschnitten wird; ziehe ebenfalls mit cd durch s, die Parallele sq und durch q mit ad, die gleichlaufende Theilungslinie qr, so ist qlmr = $\frac{1}{3}$ folglich aqrd ebenfalls $\frac{1}{3}$ des Trapezii abcd.

Anmerkung. Die Theilungen der Trapezoiden übergehen wir, da sie auf denselben Constructionsregeln beruhen, welche bei Theilung der Trapeze angewendet worden sind.

IV) Theilung eines Kreises durch concentrische Kreise.

§. 136.

123ste Aufgabe.

Einen Kreis, mittelst concentrischer Kreise, in mehrere z. B. 3 gleiche Theile zu theilen Fig. 155.

Auflösung.

Der Kreis wird durch die Durchmesser ab und ed in vier Quadranten und der Halbmesser ac in so viel gleiche Theile getheilt, als der Kreis concentrische Theile erhalten soll. Man halbire deshalb die Entfernung der Theilungspunkte 1, b und 2, b in x und y; beschreibe aus x durch 1 den Bogen 1, f; so wie aus y durch 2, den Bogen 2, y, bis sie den Durchmesser ed in f und g schneiden, und ziehe mit den Halbmessern cg und cf concentrische Kreise.

Zusatz. Soll ein Kreis mittelst gezogener Radien in eine Anzahl gleicher Theile getheilt werden; so hat man nur nöthig, die Peripherie desselben, in die verlangte Anzahl Theile zu theilen, und sodann die Radien nach den Theilungspunkten zu ziehen.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Construction verschiedener regulärer krummer Linien.

§. 137.

I) Von den Kegelschnitten.

Wenn sich ein rechtwinkliches Dreieck abv um eine seiner Catheten z. B. um bv Fig. 156. herumbewegt, so entsteht ein körperlicher Raum, der ein Conus oder Kegel genennet wird.

Die Linie bv, um welche die Bewegung geschiehet, heißt die Axe, auch die Höhe des Kegels; der Kreis ahmckia die Grundfläche und die mit ab beschriebene Fläche, die Mantel- oder Seitenfläche desselben.

Denkt man sich noch einen zweiten Kegel, durch Bewegung des Dreiecks bwy, um bw entstanden, so daß beide Axen in die gerade Linie vw fallen, so wird letzterer, der negative Kegel, im Gegensatze vom erstern genennt.

Steht die Axe perpendicular auf der Grundfläche, wie in Fig. 156., so ist der Kegel geradstehend, im Gegentheil schiefstehend.

§. 138.

Jeder geradstehende Kegel, wie abc Fig. 156., kann unter mehrern Richtungen geschnitten werden, wodurch auf dessen Seitenfläche verschiedene krumme Linien entstehen.

So bildet z. B. der Schnitt de, welcher mit der

Digitized by Google

Grundfläche des Kegels parallel geführt wird, einen Kreis.

Ist der Schnitt gegen die Grundfläche geneigt, ohne sie zu treffen, wie fx, so entsteht eine krumme Linie ftxf, welche den Namen Ellipse erhält.

Ein Schnitt rg mit der Seitenlinie ba parallel geführt, bildet eine krumme Linie hgi, deren Aeste sich immer mehr erweitern. Ihr Name ist Parabel oder Parabole.

Hat endlich der Schnitt uy eine parallele Lage mit der Axe vw, so trifft er beide Kegel, und es entstehen durch selbigen zwei krumme Linien mlk und onp, welche Hyperbeln oder Hyperbolen genennet werden.

Von der Ellipse.

§. 139.

Wenn auf einer geraden Linie mn Fig. 157. zwei feste Punkte a und b angenommen werden, so kann man sich eine krumme Linie von der Beschaffenheit denken, daß die Summe der Abstände eines jeden Punktes von ersteren beiden z. B. (ac + bc) einer gegebenen Entfernung mn gleich ist. Die krumme Linie, welche dieser Eigenschaft entspricht, ist die im vorigen §ph angeführte Ellipse.

mn, heißt sodann die große Axe,
op, durch ihre Mitte gelegt die kleine Axe,
v, ihr Mittelpunkt,
a und b, die Brennpunkte,
ab, die Excentricität,
ac und bc, die Fahrstriche,
de, oder fg, als Sehnen durch die Brennpunkte a und b, die Parameter der Ellipse.
kl, eine Tangente der Ellipse, für den Punkt c.

Um eine Tangente z. B. an c zu ziehen, verlängert man den größern Fahrstrich bc und trage den kleinern ac aus c nach h; verbinde a und h durch eine Linie; theile

ſie in zwei gleiche Theile ai = ih und ziehe durch c und i die Linie kl, ſo fällt ſie mit der Ellipſe in dem einzigen Punkte c zuſammen.

Eine der vorzüglichſten Eigenſchaften der Ellipſe iſt: daß die Winkel ack und bcl, welche die Fahrſtriche jedes beliebigen Punktes mit der Tangente machen, einander gleich ſind; deshalb kehrt in einer elliptiſchen Umgebung jeder Licht- oder Schallſtrahl, welcher von einem der Brennpunkte ausgeht, in den andern zurück, indem der Einfallswinkel dem Abprallswinkel gleich iſt.

Ellipſen ſind auf mehrere Arten zu zeichnen. Hier ſollen jedoch nur die gewöhnlichſten angeführt werden.

Von Conſtruction der Ellipſe.

§. 140.

Mechaniſche Conſtruction.

In den Brennpunkten a und b Fig. 157., werden nach Maßgabe der zu verzeichnenden Ellipſe, Nadeln, Stifte oder auf dem Felde Pfähle eingeſtochen und um ſelbige ein Faden oder eine Schnur geſchlungen, deren Länge ma + ab + bn gleich iſt. Man halte einen Stift oder Pfahl, mit welchem die an a und b befeſtigte Schnur ſtraff angezogen wird, ſenkrecht und beſchreibe oder reiße durch deſſen Fortbewegung die verlangte Ellipſe.

§. 141.

124ſte Aufgabe.

Die große und kleine Axe d'e' und g h' einer Ellipſe ſind gegeben. Es ſollen mehrere einzelne Punkte in ihr beſtimmt werden, durch welche ſodann die krumme Linie, entweder aus freier Hand, oder mittelſt beſonders dazu gefertigter Inſtrumente, beſchrieben werden kann Fig. 158.

Digitized by Google

Auflösung.

Man ziehe zwei Linien AB und CD, die sich in c rechtwinklich schneiden; trage aus c nach d und e die halbe große, so wie nach g und h die halbe kleine Axe. Fasse cd in den Zirkel und durchschneide aus h die große Axe de in a und b, so sind letztere die Brennpunkte der Ellipse. Man theile ferner die Excentricität ac in mehrere Theile, die nach a hin an Größe abnehmen; fasse d5 im Zirkel, beschreibe aus a und b die Bogen ki, op, st und wx; hierauf nehme man den noch übrigen Theil e5 der großen Axe im Zirkel und ziehe aus a und b die Bogen vu, yz, mn und qr, so liegen ihre Durchschnittspunkte in der, beiden Axen zugehörigen Ellipse.

Auf gleiche Weise verfahre man mit den Theilen d,4 und e,4, so wie mit d,3 und e,3 u. s. w., wo endlich mittelst Verbindung dieser Punkte die verlangte Ellipse entsteht.

Construction der sogenannten Ovale oder Linsenlinien.

§. 142.

125ste Aufgabe.

Ein Oval mittelst zweier sich durchschneidenden Kreise zu construiren, wozu die große Axe ab gegeben ist Fig. 159.

Auflösung.

Man ziehe eine willkührliche Linie ab und mache selbige der gegebenen großen Axe gleich; theile sie in 3 gleiche Theile ac = cd = db, beschreibe mit ac, aus c und d Kreise; verbinde die Punkte e und c; e und d, durch Linien, die bis h und k, ferner die Punkte f und c, f und d durch Linien, die bis g und i verlängert werden.

Endlich beschreibe man mit fg = fi aus f den Bogen gi und aus e den Bogen hk.

Digitized by Google

§. 143.

126ſte Aufgabe.

Ein Oval mittelſt zweier berührenden Kreiſe zu zeichnen, wenn die große Axe ab gegeben iſt Fig. 160.

Auflöſung.

Man theile die große Axe ab in 4 gleiche Theile ac = cx = xd = db, ziehe mit ac aus c und d Kreiſe, die ſich in x berühren; nehme die Centrallinie cd im Zirkel und beſchreibe damit aus c und d Durchſchnittsbogen in e und f, verbinde e und c, e und d durch Linien, die man bis h und k; ferner f und c, f und d durch Linien, die man bis g und i verlängert; und beſchreibe endlich mit fg = fi aus f und e, die Bogen gi und hk.

§. 144.

127ſte Aufgabe.

Ein Oval mittelſt zweier ſich nicht berührenden Kreiſe zu zeichnen Fig. 161.

Auflöſung.

Man beſchreibe, je nachdem das Oval breit oder ſchmal werden ſoll, mit willkührlichem Halbmeſſer ac, die zwei Kreiſe ag und hb aus c und d, mache mit der Centrallinie cd, aus c und d, Durchſchnittsbogen in e und f, und verfahre übrigens wie vorhin.

§. 145.

128ſte Aufgabe.

Mit den gegebenen Axen a'b' und c'd', oder welches gleichviel, aus der gegebenen Länge und Breite, ein Oval zu zeichnen Fig. 162.

Auflöſung.

Es wird eine Linie in willkührlicher Länge gezogen,

die große Axe a'b', aus a nach b getragen und in x halbirt. Ferner halbire man auch die kleine Axe c'd' und trage die Hälfte derselben von a nach l. Den Unterschied lx, zwischen der halben großen und halben kleinen Axe, theile man in 3 gleiche Theile; trage $\frac{1}{3}$ von l nach c und die dadurch erhaltenen $\frac{2}{3}$ = xc von x nach d. Man beschreibe nunmehr mit cd, aus c und d, Durchschnittsbogen in e und f; verbinde die Punkte e und c, so wie e und d, durch Linien, die man bis h und k; ferner die Punkte f und c, f und d, durch Linien, die man bis g und i verlängert; beschreibe mit ac aus c den Bogen hg und aus d den Bogen ik; ferner mit eh = ek aus e, den Bogen hk, so wie aus f, den Bogen gi.

§. 146.

129ste Aufgabe.

Zu einem gegebenen Oval oder Ellipse den Mittelpunkt, und die Lage der beiden Axen zu finden Fig. 163.

Auflösung.

Man ziehe in willkührlicher Richtung die Linie ab schief durch das Oval oder die Ellipse, und mit ihr in beliebiger Entfernung, die Parallele cd; halbire ab und cd in h und g; ziehe durch g und h die Linie ef und halbire sie in x; so ist x der gesuchte Mittelpunkt des Ovals oder der Ellipse. Man beschreibe nun ferner aus x einen Kreis, der das Oval z. B. in i und k schneidet; ziehe die Linie ik, halbire sie in q und verbinde die Punkte x und q durch die Linie op als der großen Axe der Ellipse. Endlich gibt eine Parallele, mit ik durch x gezogen, die kleine Axe lm.

§. 147.

130ste Aufgabe.

Ein eyförmiges oder Spitzoval zu zeichnen Fig. 164.

Digitized by Google

Auflösung.

Nachdem ein Kreis acbd beschrieben worden ist, ziehe man die sich rechtwinklich schneidenden Durchmesser ab und cd; verbinde die Punkte a und d, b und d durch Linien und verlängere sie bis f und e; ziehe endlich mit ab, aus a und b, die Bogen be und af; und mit df = de aus d, den Bogen fe.

Von der Parabel.

§. 148.

Wenn von einer Linie mn Fig. 165., eine Linie pq normal abwärts gefällt, und in letzterer ein beliebiger Punkt f angenommen wird, so kann eine krumme Linie gezeichnet werden, wovon jeder Punkt von f und der Linie mn gleichweit entfernt ist. Die dadurch entstehende krumme Linie ist die Parabel. Hierbei finden folgende Benennungen Statt:

mn wird die Leitlinie,
x der Leitpunkt,
f der Brennpunkt,
ul die Axe,
u der Scheitelpunkt der Parabel,
fe = fx als die Entfernung des Brennpunkts von der Leitlinie mn, welche die Figur der Parabole bestimmt, heißt der halbe Parameter, mithin ist:
eg, der Parameter,
uf, uv, ul, Abscissen,
ef = fg, cv = vd, al = lb, Ordinaten,
fc, fa, Fahrstriche oder Leitstrahlen,
bq, die Tangente des Punktes b,
lq, die Subtangente,
bp, rechtwinklich auf die Tangente gezogen, die Normale,
lp, die Subnormale,
iw, als eine durch den Punkt c mit der Axe der Parabel parallel gezogene Linie, wird ein Durchmesser der Parabel genennt.

Digitized by Google

Parabeln können, nach Maßgabe der Dimensionen, welche zu ihrer Construction gegeben sind, auf mehrere Arten verzeichnet werden. Hier sollen nur die vorzüglichsten folgen.

§. 149.

131ste Aufgabe.

Vermittelst der Leitlinie eg Fig. 166., des in ihr angenommenen Leitpunktes c und des gegebenen halben Parameters cf, eine Parabel zu construiren.

Auflösung.

Man ziehe von c die Abscissenlinie cl rechtwinklich auf eg, trage den halben Parameter aus c nach f; theile cf in zwei gleiche Theile ca = af, so ist a der Anfangspunkt der Abscissen und Scheitelpunkt der Parabel. Nun lege man durch die auf der Axe al willkührlich angenommenen Punkte n, h, i, k, l Linien, welche al rechtwinklich schneiden; fasse die Entfernungen jeder dieser Linien von dem Leitpunkte c z. B. nc im Zirkel; setze dessen Spitze in f und schneide die Sehne, deren Entfernung von der Leitlinie man genommen hat, hier in b und b'. Dasselbe Verfahren wiederhole man mit den Entfernungen ch, ci, ck, cl und durchschneide die aufeinander folgenden Sehnen in p, q; d, d'; e, e'; g, g', so sind bn = b'n'; hp = hq; di = d'i'; ek = e'k' ꝛc. die Ordinaten der ihnen zugehörigen Abscissen an, ah, ai, ak, al. Werden endlich die gefundenen Punkte g, e, d, b, a, b', d', e', g' durch eine krumme Linie verbunden, so ist sie die verlangte Parabel.

Soll an einen beliebigen Punkt der Parabel z. B. an d, eine Tangente gezogen werden, so lege man durch d die Sehne dd', die Axe rechtwinklich schneidend; trage deren Abscisse ai auf die verlängerte Axe aus a nach m und ziehe durch m und d die Linie mn, so wird selbige

Digitized by Google

die Parabel nur in dem Punkte d berühren, folglich eine Tangente seyn.

Die paraboliſche Linie hat die Eigenſchaft, daß der Winkel, welcher von den Durchmeſſern dx und py und den Fahrſtrichen df und pf, mit der Tangente vm gebildet werden, einander gleich ſind. Es iſt nämlich ∠vdx = ∠mdf, ſo wie ∠v'py = m'pf u. ſ. w. Hieraus erklärt ſich die Erſcheinung, daß Licht oder Schallſtrahlen, welche mit der Axe eines paraboliſchen Brenn- oder Hohlſpiegels parallel einfallen, im Brennpunkte f zuſammengebrochen werden.

Und umgekehrt, ſetzt man zwei paraboliſche Hohlſpiegel ſo gegeneinander, daß ihre Axen in einander fallen; und bringt in den Brennpunkt des einen glühende Kohlen, in den Brennpunkt des andern aber brennbare Materien; ſo können letztere in einer Entfernung von 20′ damit angezündet werden. Denn die aus f gehenden Wärmeſtrahlen gehen parallel mit dx zum andern Hohlſpiegel über, und werden im Brennpunkte des letztern wieder vereinigt. Noch iſt zu bemerken, daß Körper, die im luftleeren Raume unter einer ſchiefen Richtung mit dem Horizont geworfen werden, nach mechaniſchen Geſetzen eine paraboliſche Linie beſchreiben.

§. 150.

Nach §. 148. und Fig. 165. iſt die Sehne eg, welche die Axe in dem Brennpunkte f ſchneidet, der Parameter; auch zeigt der vorhergehende §ph, daß jeder Punkt der Parabel von dem Brennpunkte und der Leitlinie gleiche Entfernung hat; folglich iſt fx = ef = der Hälfte und ux = uf = dem vierten Theil des Parameters. Kennt man daher die Länge des Parameters einer Parabel, ſo kann ſelbige, wie nachſtehende Aufgabe zeigt, conſtruirt werden.

132ſte Aufgabe.

Eine Parabel, aus der gegebenen Länge

Digitized by Google

ihres Parameters p'q' Fig. 166. zu construiren.

Auflösung.

Man theile den gegebenen Parameter p'q' in 4 gleiche Theile und trage ¼ desselben auf die Linie cl aus c nach a und aus a nach f; so ist c als der Leitpunkt, a als der Scheitelpunkt und f als der Brennpunkt der Parabel anzusehen. Das übrige Verfahren bleibt dem Vorigen völlig gleich.

§. 151.

Aus den Eigenschaften der Parabel läßt sich erweisen, oder praktisch durch Ausmessung überzeugen, daß die Subtangente lp Fig. 165. dem halben Parameter eg gleich ist. Ferner, daß wenn in einer Parabel zwei Sehnen in beliebiger Richtung parallel gezogen und dieselben halbirt werden, eine Linie durch die Theilungspunkte gelegt, mit der Axe der Parabel gleichlaufend ist. Diese Eigenschaften geben ein Mittel an die Hand, folgende Aufgaben aufzulösen.

133ste Aufgabe.

Zu einer gegebenen paraboliſchen Linie abc Fig. 169. ſoll die Lage der Axe; ferner der Parameter, ſo wie die Entfernung des Leit- und Brennpunktes von dem Scheitelpunkte der Parabel, durch Zeichnung gefunden werden.

Auflöſung.

Man ziehe in der paraboliſchen Linie die Sehnen de und al in willkührlicher Richtung gleichlaufend, theile ſie in zwei gleiche Theile dp = pe und aq = ql; lege durch ihre Theilungspunkte p und q den Durchmeſſer vw; ziehe aus a die Sehne ac dergeſtalt, daß ſie den Durchmeſſer vw rechtwinklich ſchneidet; theile die Sehne ac in zwei gleiche Theile ag = gc und ziehe mh durch g rechtwink-

Digitized by Google

lich oder mit vw parallel, so erhält man die Axe bg der Parabel, und durch Umschlagung der letzteren aus b nach m die Subtangente mg, woraus sich die Lage der Tangente am für den Punkt a ergibt. Endlich errichte man die Normale ah rechtwinklich auf am, welche gh als die Subtangente abschneidet. Es ist demnach 2 gh = dem Parameter und $\frac{1}{2}$ gh = bn = bf = der Entfernung des Leit- und Brennpunktes vom Scheitelpunkte b.

Von der Hyperbel.

§. 152.

Wenn die Entfernungen jedes Punktes einer krummen Linie, von zwei gegebenen Punkten f und f', Fig. 167., so beschaffen sind, daß ihre Unterschiede unveränderlich einer gegebenen Linie AB gleich bleiben, so ist selbige eine Hyperbel. Dieses kann aber aus f und f', mittelst Verwechslung obiger Entfernungen, auf zweierlei Art geschehen, wodurch eine positive und eine negative Hyperbel entstehet. Um bei Verzeichnung der Hyperbel, ein gewisses Verhältniß zu erhalten, müssen zwei an Länge verschiedene Linien a'b' und d'e' gegeben seyn, welche sodann die Namen erste und zweite Axe erhalten. Hyperbeln, deren erste und zweite Axen gleich sind, nennt man gleichseitige.

134ste Aufgabe.

Eine Hyperbel mittelst der gegebenen Axen a'b' und d'e' Fig. 167. zu zeichnen.

Auflösung.

Man ziehe zwei Linien kl und pq, die sich rechtwinklich schneiden; trage die halbe erste Axe aus dem Durchschnittspunkte c, nach a und b, so wie die halbe zweite Axe aus c, nach d und g, ziehe bg und setze die Länge dieser Linie aus c nach f und f', wodurch die Brennpunkte beider Hyperbeln bestimmt sind.

Digitized by Google

Trage sodann auf einer besonders hierzu gezogenen Linie xy die erste Axe a'b' aus A nach B; setze den Zirkel in f' ein, eröffne ihn willkürlich, jedoch so, daß diese Eröffnung größer als die Eröffnung fb ist, z. B. von f' bis 1, und beschreibe den Bogen rs; solches verrichte man auch mit derselben Eröffnung aus dem Punkte f, indem man den Bogen vw beschreibt; trage hierauf dieselbe Länge aus B nach 1; fasse den Unterschied A1 im Zirkel; setze ihn in f' und f ein und durchschneide die bereits beschriebenen Bogen rs und vw.

Hierauf wird eine beliebige Entfernung z. B. f',2, in den Zirkel genommen und damit aus f' und f die Bogen tu und hv beschrieben, und sodann auf die Linie xy aus B nach 2 getragen. Mit dem sich ergebenden Unterschied A2, werden ferner auf gleiche Weise die Bogen hv und tu aus f' und f geschnitten. So fahre man fort, mehrere Punkte der Hyperbel zu bestimmen und verbinde die Durchschnittspunkte nebst den Scheitelpunkten a und b, durch die krummen Linien ctbue und Fhavk.

Von den Cykloiden.

§. 153.

Wenn ein Kreis A'mB'A' Fig. 168. eine gerade Linie A'A''' in A' berührt und auf der Linie so lange fortgewälzt wird, bis der Punkt A' die Linie zum zweiten Male trifft, so heißt die Spur A'SA''', welche der beschreibende Punkt während der Fortwälzung erzeugt, eine Cykloide oder Radlinie.

Geschiehet die Umwälzung des Kreises auf dem Umfange eines andern unbeweglichen Kreises wie in Fig. 170., so entstehet durch die Spur des angenommenen Punktes eine krumme Linie, welche die Benennung Epicykloide erhält. Geschiehet sie hingegen innerhalb des unbeweglichen Kreises, wie in Fig. 171., so heißt selbige eine Hypocykloide. Der dabei in Bewegung angenommene

Kreis, wird der Erzeugungskreis, der unbewegliche hingegen, der Grundkreis genennt.

Es gibt mehrere Arten derselben, als:

1) Die gemeine Epicykloide. Dieselbe entstehet, wenn sich, wie in Fig. 170., der Erzeugungskreis um einen andern unbeweglichen herumwälzt; ferner der beschreibende Punkt in dem Umfange des Erzeugungskreises liegt und derselbe während der drehenden Bewegung die krumme Linie A'SA'' als Epicykloide beschreibt.

2) Die verkürzte oder verschlungene Cykloide und Epicykloide entsteht, wenn der beschreibende Punkt, in einem größern, concentrisch um den Erzeugungskreis gezogenen, angenommen wird, und ersterer sich unter dieser Bedingung um den Grundkreis bewegt, wie aus Fig. 172 und 173. ersehen werden kann.

3) Die gestreckte oder verlängerte Epicykloide wird erhalten, wenn man den beschreibenden Punkt innerhalb des erzeugenden Kreises annimmt, und letzteren sich um den Grundkreis bewegen läßt, wie HIKL Fig. 172.

4) Die sphärische Epicykloide. Dieselbe unterscheidet sich von den Vorhergehenden darin, daß der Grund- und Erzeugungskreis nicht in einer Ebene befindlich sind; in der Bewegung des Erzeugungskreises aber, einerlei Winkel gegen die Ebene des Grundkreises beibehalten werden.

Anmerkung. Man bedienet sich der Epicykloiden bei Construirung der Zähne oder Kämme an Räderwerken, weil durch die epicykloidische Abrundung der erstern, die Reibung am meisten vermindert wird.

§. 154.

135ste Aufgabe.

Der Durchmesser A'B' des Erzeugungskrei-

ſes Fig. 168. und der beſchreibende Punkt A′ iſt gegeben. Es ſoll die durch Fortwälzung des erzeugenden Kreiſes entſtehende Cykloide conſtruirt werden.

Auflöſung.

Nachdem die Linie A′A‴ und der Erzeugungskreis A′mB′A′ gezeichnet worden iſt, ziehe man aus dem Berührungspunkte A′, den Durchmeſſer A′B′, rechtwinklich auf A′A‴ und trage die Länge der halben Peripherie AabcdeB′, aus A′ nach A″. Dieſes kann zwar durch Aneinanderſetzung kleiner in den Zirkel gefaßten Peripherietheile, deren Summe dem halben Umfange des Erzeugungskreiſes gleich iſt, geſchehen. Weit genauer wird ſolches jedoch erhalten, wenn man den Halbmeſſer A′B′ des Erzeugungskreiſes auf einen beliebig angenommenen Maßſtab pq trägt; die Anzahl der Theile, welche letzterer angibt, mit dem Decimalbruche 3,14... (als der Verhältnißzahl der halben Peripherie, wenn der Halbmeſſer zu 1 angenommen wird) multiplizirt; die erhaltenen Theile des Produkts, von demſelben Maßſtabe abnimmt und ſelbige, als den halben Umfang des Erzeugungskreiſes, aus A′ nach A″ trägt; wo alsdann in A″, die Perpendiculare A′S, errichtet wird.

Nun theile man den halben Umfang des Erzeugungskreiſes, ſo wie die Linie A′A″ in eine beliebige aber gleiche Anzahl (hier in 6) Theile A′a = ab = bc = cd = de = eB′ und A′1 = 1; 2 = 2; 3 = 3; 4 = 4; 5 = 5; A″; ziehe durch die Theilungspunkte a, b, c, d, e, B, mit A′A″ die Parallelen aa‴, bb‴, cc‴ und mit A′B′ durch 1; 2; 3; 4; 5 ꝛc. die Parallelen 1,1; 2,2; 3,3 ꝛc. Hierauf faſſe man aa in den Zirkel und trage dieſe Entfernung aus a′ nach a″, eben ſo bb aus b′ nach b″; cc aus c′ nach c″; dd aus d′ nach d″; ee aus e′ nach e″. Endlich werden die Punkte A′, a″, b″, c″, d″, e″, S mittelſt einer krummen Linie verbunden, welche die halbe Cykloide Aa″b″c″d″e″S

Digitized by Google

darstellt. Um die ganze Cykloide zu erhalten, trage man die halbe Sehne Dd'' aus D nach d'''; Cc'' aus C nach c''' u. s. w.

§. 155.

136ste Aufgabe.

Eine gemeine Epicykloide zu zeichnen, wenn der Halbmesser des Grund- und Erzeugungskreises gegeben ist Fig. 170.

Auflösung.

Es sey A'A''''A'' der halbe Grundkreis, so wie A'X'B', der halbe Erzeugungskreis.

Man gebe dem Bogen A'A'''' des Grundkreises die Länge des halben Umfanges A'X'B', indem man entweder, wie in voriger Aufgabe, letzteren in kleine Theile theilt, und ihre Anzahl aus A' nach A'''' trägt, oder genauer, wenn das Maß des Halbmessers vom Erzeugungskreise mit 180 multiplicirt und das Produkt mit dem Maße des Halbmessers vom Grundkreise dividirt wird, wo sodann der Quotient das Gradmaß des Bogens A'A'''' zeigt, welches mit Hülfe des Transporteurs in A'''' abgestochen und die Linie sx gezogen werden kann.

Man theile nun ferner, den halben Umfang A'X'B' des Erzeugungskreises in eine gleiche Anzahl (hier in 6) Theile; A'a = ab = bc = cd = de = eB' und A'1 = 1;2 = 2;3 ꝛc. Beschreibe aus X durch a, b, c, d ꝛc. die concentrischen Bogen aAa''', bBb''', cCc''' ꝛc. und ziehe aus X durch 1, 2, 3, 4 ꝛc. die Linien Xa', Xb', Xc' ꝛc., nehme die Entfernung aa in den Zirkel und trage dieselbe aus a' nach a''; ferner bb, aus b' nach b''; cc, aus c' nach c'' ꝛc., so liegen die Punkte A', a'', b'', c'', d'', e'', S in einer Epicykloide, weshalb selbige durch die krumme Linie A'a''b''c''d''e''S zu verbinden sind. Durch Umschlagung des Bogens Ee'' aus E nach e'''; Dd'' aus

D nach d'''; Cc'' aus C nach c''' ꝛc. ist endlich die Epicykloide vollständig zu ergänzen.

§. 156.

137ste Aufgabe.

Eine Hypocykloide zu zeichnen, wenn der Halbmesser des Grund- und Erzeugungskreises gegeben ist Fig. 171.

Auflösung.

Die Construction der Hypocykloide hat mit der vorhergehenden viel Aehnlichkeit. Denn nachdem man die Linie A'X rechtwinklich aus dem Mittelpunkte des Grundkreises gezogen und der Erzeugungskreis A'D'B' ersteren in A' berührend, beschrieben worden ist; mache man nach Anleitung der vorhergehenden Aufgabe, den Bogen A'A''' = dem halben Umfange A'D'B' oder A'bB' des Erzeugungskreises; theile beide in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (hier in 4) Aa = ab = bc ꝛc. und A;1 = 1;2 = 2;3 ꝛc.; ziehe durch a, b, c ꝛc. concentrische Kreise und aus X nach 1, 2, 3, Radien; mache sodann a'a'' = aa; b'b'' = bb; c'c'' = cc ꝛc. und verbinde die Punkte A, a'', b'', c'', S durch die krumme Linie Aa''b''c''S als der halben Hypocykloide; um dieselbe zu ergänzen, trage man den Bogen Cc'' aus C nach c'''; Bb'' aus B nach b''' u. s. w. und lege durch c''', b''' ꝛc. den andern Zweig der Hypocykloide.

§. 157.

138ste Aufgabe.

Die Halbmesser des erzeugenden Kreises AB, und des beschreibenden Kreises A'B' Fig. 172. sind gegeben. Es soll eine gemeine verschlungene Cykloide gezeichnet werden.

Auflösung.

Man ziehe die Grundlinie FG; errichte in A' eine

Perpendiculare A′B′; beschreibe den erzeugenden Kreis AB, daß er FG in A berührt, so wie den concentrischen beschreibenden Kreis A′B′; ziehe durch A′ mit FG eine Parallele; mache A′A‴ auf die mehrmals angeführte Weise dem halben Umfange des erzeugenden Kreises AB gleich. Theile ferner den halben Umfang des beschreibenden Kreises A′B′ in eine beliebige Anzahl (hier in 6) gleiche Theile Aa = ab = bc = cd = de = eB; und auf gleiche Weise A′A‴ in dieselbe Anzahl Theile A;1 = 1;2 = 2;3 ꝛc. Ziehe durch a, b, c, d, e, B′ mit A′A‴ die Parallelen a″a‴; b″b‴; c″c‴ ꝛc., so wie durch 1, 2, 3 ꝛc. mit A′B′ die Parallelen 1,1; 2,2; 3,3 ꝛc. Fasse aa in den Zirkel und trage sie aus a′ nach a″; eben so bb aus b′ nach b″; ferner cc aus c′ nach c″ u. s. w., wo, durch Verbindung der Punkte A′a″b″c″d″e″S, die halbe verkürzte Cykloide entstehet, welche mittelst Umschlagung von A″a″ aus A″ nach a‴, von Bb″ aus B nach b‴ ꝛc. zu einer vollständigen ergänzt werden kann. Wird endlich mit dem halben Umfange A′a″b″c″d″e″B′ und dem halben Umfange des erzeugenden Kreises AB, dieselbe Construction verrichtet, so ergibt sich die Verschlingung xc″b″a″A′a′b″x u. s. w.

Anmerkung. Weil die Zeichnung einer gestreckten oder verlängerten Cykloide mit der verkürzten übereinstimmend ist, nur daß der beschreibende Kreis MN, kleiner als der erzeugende AB angenommen werden muß; so ist selbige hier weggelassen, und nur ihre Gestalt HIKL gezeichnet worden.

§. 158.

139ste Aufgabe.

Eine geschlungene Epicykloide zu zeichnen, wenn der Halbmesser des Grundkreises Az, ferner der Halbmesser des Erzeugungskreises AB und des beschreibenden Kreises A′B′ Fig. 173. gegeben ist.

Digitized by Google

Auflösung.

Nachdem der Grundkreis AYZ und die Linie BX′ gezogen worden, beschreibe man den erzeugenden Kreis AB, daß derselbe ersteren in A berührt, so wie den concentrischen beschreibenden Kreis A′B′; theile den halben Umfang des letztern in eine Anzahl (hier in 6) gleiche Theile A′a = ab = bc = cd = de = eB, und ziehe aus X durch die Theilungspunkte a, b, c, d, e concentrische Kreise; mache den Bogen A′A‴, dem halben Umfange des beschreibenden Kreises AB gleich; theile denselben in eben so viel Theile A′1 = 1,2; = 2,3 ꝛc. und ziehe die Radien X1, X2, X3 ꝛc. Nehme die Entfernung aa in den Zirkel und trage sie aus a′ nach a″; eben so bb aus b′ nach b″; ferner cc aus c′ nach c″; dd aus d′ nach d″ ꝛc., so entstehet durch Zusammenziehung der Punkte A′, a″, b″, c″, d″, e″, S die halbe geschlungene Epicykloide, welche mittelst Umschlagung der Bogen Ee″ aus E nach e‴; Dd″ aus D nach d‴ vollständig zu ergänzen ist.

Anmerkung. Die Construction der gestreckten Epicykloide ist der vorigen völlig gleich; nur daß der beschreibende Kreis MN kleiner als der erzeugende AB angenommen, und der Bogen VW dem halben Umfange des beschreibenden Kreises MN gleich gemacht werden muß.

Von den Spirallinien.

§. 159.

Wenn der Endpunkt einer geraden Linie als Drehpunkt betrachtet wird, um welchen letzteren sich diese Linie, in immerwährendem Wachsthume begriffen, herumbewegt, und das Wachsthum dieser Linie nach einem gewissen Gesetze erfolgt, so beschreibt der andere Endpunkt eine krumme Linie, die sich immer mehr von dem angenommenen Drehpunkte entfernt, und den Namen **Spirallinie** erhält.

Zur Verzeichnung derselben müssen folgende Punkte,

Digitized by Google

Linien und Winkel in Hinsicht ihrer Lage Fig. 174. gegeben seyn.

1) Die Linie C′C als die Axe der Spirale,
2) C der Mittelpunkt oder Pol und A der Anfangspunkt derselben,
3) AFE der Grundkreis,
4) der Winkel C′CF, das ist der Polarwinkel,
5) CD, als der Abstand des Punktes D der Spirale von dem Mittelpunkte.

Uebrigens richtet sich die Gestalt der Spiralen nach den Eigenschaften der Erzeugungslinie MN. Ist dieselbe gerade, so entstehet eine lineare oder archimetische; ist sie ein Theil einer Parabel, eine parabolische; ist sie eine Hyperbel, eine hyperbolische Spirallinie ꝛc. Jede derselben verändert aber aufs Neue ihre Windungen, so wie die Erzeugungslinie ihre Lage gegen die Axe und den Pol der Spirale verändert. Weil jedoch die paraboliſchen und hyperboliſchen Spiralen für gegenwärtigen Zweck nicht geeignet sind, so soll nur das constructive Verfahren bei Entwerfung der parallelen und linearen Spirallinie gezeigt werden.

§. 160.

140ste Aufgabe.

Eine parallele Spirallinie zu zeichnen, wenn der Abstand der Windungen = ac Fig. 175. gegeben ist.

Auflösung.

Man ziehe die Linie xy, nehme den halben Abstand der Windungen = ab in den Zirkel und beschreibe damit aus b den Halbkreis ac, dann nehme man ac in den Zirkel und beschreibe aus a den Halbkreis cd; nun fasse man bd und beschreibe aus b den Halbkreis de; ferner mit ae aus a den Halbkreis ef ꝛc.

Digitized by Google

§. 161.

141ste Aufgabe.

Eine lineare oder archimetische Spirale zu beschreiben, wenn der Grundkreis ABDE und der Abstand zweier Windungen für den Halbmesser CF Fig. 176. gegeben sind.

Auflösung.

Durch den Pol C der Spirale werden zwei Linien vw und xy gezogen, die sich rechtwinklich schneiden; ferner ist aus C nach F der gegebene Halbmesser, so wie aus F nach A, die Weite der Windungen zu tragen und aus dem Durchschnittspunkte C durch A, der Grundkreis ABDE zu ziehen. Man theile nunmehr jeden der Quadranten in eine willkührliche Anzahl (hier in 3) gleiche Theile AI = I,II = II,B und ziehe aus C durch I und II die Linie Cp; Cq ꝛc. Der gegebene Abstand der Windung AF wird ferner in vier gleiche Theile getheilt und AG, als dem Viertel von AF, drei gleiche Theile A1 = 1,2 = 2G, wie dem Quadranten gegeben. Endlich beschreibe man aus C von 1 bis P, den Bogen 1P, von 2 bis Q, den Bogen 2Q, von G bis H, den Bogen GH, und lege durch die Punkte A, P, Q, H die krumme Linie APQH.

Auf gleiche Weise wird HI = AG = $\frac{1}{4}$ AF gemacht, sodann HI ebenfalls in drei gleiche Theile getheilt; die Bogen 1,S; 2,T; IK aus C gezogen und so fort mit allen übrigen Windungen verfahren. Hierbei ist zu bemerken, daß die krumme Linie der wahren Spirale immer näher kommt, je größer die gleiche Anzahl Theile ist, welche die Quadranten und AG als das Viertel von AF erhalten.

Digitized by Google

Von den Voluten oder den sogenannten Schneckenlinien.

§. 162.

Die Voluten oder Schneckenlinien werden als Verzierungen in den Kapitälern mehrerer Säulenordnungen angewandt; die gebräuchlichsten sind die Vignolsche und Goldmannische Schneckenlinie, deren Constructionen hier gezeigt werden sollen.

142ste Aufgabe.

Die Vignolsche Schneckenlinie zu zeichnen, wenn die Höhe der Volute oder die sogenannte Cathete AB Fig. 177. gegeben ist.

Auflösung.

Man theile die vertikale Höhe der Schnecke AB in 16 gleiche Theile, wovon der obere Theil AC,8; ferner CD, als das Auge der Schnecke, 2, und der untere Theil BD, 6 Theile erhält. Ziehe durch das Centrum des Auges die Linie EF rechtwinklich, so wird dasselbe in vier Quadranten getheilt, deren Durchschnittspunkte G, C, H, D in Gestalt eines Vierecks verbunden werden. Man theile nun ferner jede Seitenlinie des Vierecks in die Hälfte, und verbinde die gegenüberliegenden Theilungspunkte 1,3 und 2,4 durch Linien, wovon die Hälfte jeder dieser Linien aufs Neue in 3 gleiche Theile zu zerlegen ist, welche man mit den auf einander folgenden Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. bezeichnet, deren Ordnung die Figur andeutet. Man ziehe nunmehr durch die Punkte 1, 5, 9, 12, 8, 4 mit der Linie EF die Parallelen 1b, 5f, 9k, 11m, 7h, 3d und mit AB die Parallelen 3c, 7g, 11l, 9n, 5i, 1e; setze den Zirkel in 1 ein, eröffne ihn bis a und ziehe den Quadranten ab; sodann in 2, eröffne ihn bis b und ziehe den Quadranten bc; auf gleiche Weise auf 3, den Quadranten cd ꝛc. Eben so fahre man in der durch Ziffern angedeuteten Ord-

nung fort, den Zirkel einzusetzen und ihn bis zu dem Endpunkt des zuletzt gezogenen Quadranten zu eröffnen, wo endlich, bei einem richtigen Verfahren, die Volute das Auge der Schnecke in C treffen wird.

Anmerkung. Soll die Schneckenlinie einen sogenannten Saum a'b'c'd'e' ꝛc. erhalten (welcher durch die punktirte Linie angedeutet ist und Einen Theil wie a1 zur Breite hat); so denke man sich jeden kleinen Theil im Schneckenauge wie 1;5 in vier gleiche Theile getheilt und setze bei der Beschreibung jedes Quadranten den Zirkel in den Theilungspunkt des nächst darunter befindlichen Viertels. Die Construction des Saums bleibt übrigens die Vorige.

§. 163.

143ste Aufgabe.

Die Goldmannische Schneckenlinie zu zeichnen, wenn die Cathete AB Fig. 178. gegeben ist.

Auflösung.

Die Cathete AB wird, wie bei der Vignolschen Schneckenlinie, ebenfalls in 16 Theile getheilt, wovon AD = 8; DE = 2 und EB = 6 solcher Theile erhält.

Nachdem das Auge der Schnecke aus dem 9ten Theilungspunkte von A abwärts gezählt, beschrieben worden ist; ziehe man durch dessen Mittelpunkt die Linie VW rechtwinklich auf AB; theile DE in 4 gleiche Theile (man vergleiche hiermit Fig. * im vergrößerten Maßstabe) und construire mit der Entfernung des ersten und dritten Theilungspunktes von DE nämlich mit vy das Quadrat vwxy; ziehe aus C nach w und x die Linien Cw und Cx; theile die Seitenlinie vy in sechs Theile; lege durch die Theilungspunkte mit VW Parallelen, bis selbige Cw und Cx schneiden, und verbinde die gegenüberliegenden Abschnittspunkte durch Linien, welche mit AB gleichlaufend sind. Ferner schreibe man an die Eckpunkte der daraus entste-

Digitized by Google

henden Parallelogramme die aufeinander folgenden Zahlen 1, 2, 3, 4 5 ꝛc., wie Figur * zeigt, und verlängere ihre Seitenlinien bis 1,b; 5,f; 9k; 2c; 6g u. s. w. in paralleler Richtung mit VW und AB. Setze hierauf den Zirkel in die Ecke des Quadrats 1, und beschreibe den Quadranten Ab; so wie aus der Ecke 2, den Quadranten bc ꝛc. In dieser durch die Ziffern angedeuteten Ordnung fahre man fort, die Quadranten cd; de; ef; fg ꝛc. zu beschreiben, wo sich endlich die Volute in m, an das Auge DE anschließen wird.

Um den Saum der Schneckenlinie zu beschreiben, finde man mittelst eines Proportionalwinkels zu AC, FC und AF (in I) die vierte Proportionallinie F″f″ (in II); indem man aus C′ mit CA (Fig. I) = C′A′ (in II) einen Bogen beschreibt; AF (aus I) = A′F′ (in II) als Sehne darauf trägt; dasselbe auch mit C′F″ = CF verrichtet und die dadurch abgeschnittene Entfernung F″f″ (in II) als die Seitenlinie eines im Kreise DE (I) zu beschreibenden Quadrats betrachtet (welches mittelst punktirter Linien angedeutet ist) und dessen fernere Eintheilung mit dem Quadrate vwxy übereinstimmt, wo endlich aus den in der Ordnung folgenden Eckpunkten, die Quadranten des Saumes F′b′, b′c′, c′d′ ꝛc. beschrieben werden.

Von der Evolvente oder Abwickelungslinie.

§. 164.

144ste Aufgabe.

Eine Evolvente oder Abwickelunglinie für einen Kreis zu zeichnen, wenn dessen Halbmesser gegeben ist.

Auflösung.

In der Peripherie des Kreises AB Fig. 179. sey in B ein Faden befestiget und um BedcbaA gelegt. In A be-

Digitized by Google

finde sich ein beschreibender Punkt, z. B. ein senkrechter Stift, welcher, indem der Faden straff angezogen und abgewickelt wird, die krumme Linie A 1, 2, 3, 4, 5, D beschreibt. Der Kreis AB erhält sodann den Namen Evolute oder Umwickelungslinie, und A, 1, 2, 3, 4, 5, D die Benennung Evolvente oder Abwickelungslinie.

Die Construction der letztern ist folgende: Man beschreibe mit dem gegebenen Halbmesser BC den Kreis; ziehe AB durch den Anfangspunkt A und den Mittelpunkt C, errichte in B eine Tangente BD rechtwinklich auf AB, mache BD dem halben Umfange des Kreises AabcdeB gleich, indem man das Maß des Halbmessers CB, von einem beliebigen Maßstabe genommen, mit 3,141 multiplicirt (wäre z. B. selbiges = 2″, so ist BD = 2 × 3,141 = 6,282″); oder den halben Kreis AabcdeB in eine Anzahl kleiner Theile theilt, und ihre Anzahl aus B nach D trägt. Sodann theile man den halben Umfang des Kreises, so wie BD, in beliebige, aber gleiche (hier in 6) Theile Be = ed = dc ꝛc. und BI = I,II = II,III ꝛc., ziehe die Halbmesser Ca, Cb, Cc ꝛc., errichte in ihren Endpunkten die Perpendicularen a1, b2, c3 ꝛc. und mache a1 = BI, b2 = BII, c3 = CIII ꝛc., so liegen die erhaltenen Endpunkte A, 1, 2, 3, 4, 5, D in der dem Kreise zugehörigen Evolvente. Je kleiner die Theile Aa, ab, bc ꝛc. und die BI, I,II, II,III ꝛc. angenommen werden, desto genauer bestimmt sich diese Abwickelungslinie.

Von der Kettenlinie.

§. 165.

Wenn eine Kette ADB Fig. 180. aus sehr kleinen Gliedern bestehet und mit ihren Enden an zwei festen Punkten A und B dergestalt aufgehangen wird, daß die Entfernung AB kleiner als die Länge der Kette ist, so bildet selbige frei herabhängend eine krumme Linie, die den

Digitized by Google

Namen **Kettenlinie** erhält. Der Punkt D heißt der Scheitelpunkt; ferner heißen CE, CH, CL ꝛc. Abscissen und CA = CB, EF = EG ꝛc. die ihnen zugehörigen Ordinaten.

Nimmt man an, daß gleiche Theile der Kette auch gleiches Gewicht haben, so entstehet bei deren Aufhängung die gemeine Kettenlinie. Weil aber das Gewicht einer Kette in mehreren Theilen nach Maßgabe ihrer stärkeren oder schwächeren Glieder verschieden seyn kann, so muß sich auch nach diesen Verhältnissen ihre Gestalt abändern.

Uebrigens ist noch zu bemerken, daß die Lehrsätze, welche auf die Kettenlinie Bezug haben, auch bei einem nach der Kettenlinie aufgerichteten Bogen, von unendlich kleinen Gewölbsteinen zusammengesetzt, anwendbar sind.

§. 166.

145ste Aufgabe.

Eine gemeine Kettenlinie zu zeichnen, wenn die Entfernung der Aufhängepunkte AB und ihre größte Abscisse CD Fig. 180. gegeben ist.

Auflösung.

Die hierher gehörige Construction kann nur mittelst einer, aus ihren Eigenschaften hergeleiteten, Hülfstafel geschehen. Es wird hinreichend seyn, selbige so einzurichten, daß für jedes Hunderttheilchen der zur Einheit angenommenen Entfernung AB, die Abscisse und Ordinate für diese Kettenlinie berechnet, ferner der Quotient von jeder Abscisse, durch die ihr zugehörige Ordinate dividirt, darin enthalten und zugleich das Verhältniß der für jeden Quotienten zu berechnenden Abscisse und Ordinate darneben befindlich ist.

Die Tabelle, worin die allgemeine Größe L, welche von den gegebenen Dimensionen der zu verzeichnenden Kettenlinie abhängt, noch besonders bestimmt werden muß, ist folgende:

Digitized by Google

Quotient durch Division der Abscisse durch die Ordinate hervorgebracht.	Ordinaten.	Abscissen.
0,005	0,010 . L	0,00005 . L
0,010	0,020 . L	0,00020 . L
0,015	0,030 . L	0,00045 . L
0,020	0,040 . L	0,00081 . L
0,025	0,050 . L	0,00125 . L
0,030	0,060 . L	0,00181 . L
0,035	0,070 . L	0,00245 . L
0,040	0,080 . L	0,00320 . L
0,045	0,090 . L	0,00406 . L
0,050	0,100 . L_1*	0,00500 . L_1*
0,060	0,120 . L	0,00721 . L
0,070	0,140 . L	0,00982 . L
0,080	0,160 . L	0,01283 . L
0,090	0,180 . L	0,01624 . L
0,100	0,200 . L_2*	0,02007 . L_2*
0,126	0,250 . L	0,03141 . L
0,151	0,300 . L_3*	0,04534 . L_3*
0,177	0,350 . L	0,06188 . L
0,203	0,400 . L_4*	0,08107 . L_4*
0,229	0,450 . L	0,10297 . L
0,255	0,500 . L_5*	0,12763 . L
0,282	0,550 . L	0,15510 . L_3*
0,309	0,600 . L_6*	0,18546 . L
0,337	0,650 . L	0,21879 . L_4*
0,364	0,700 . L_7*	0,25517 . L
0,393	0,750 . L	0,29468 . L
0,422	0,800 . L_8*	0,33743 . L_8*
0,451	0,850 . L	0,38353 . L
0,481	0,900 . L_9*	0,43309 . L_9*
0,512	0,950 . L	0,48622 . L

Digitized by Google

Quotient durch Division der Abscisse durch die Ordinate hervorgebracht.	Ordinaten.	Abscissen.
0,543	1,000 . L_{10}*	0,54308 . L_{10}*
0,575	1,050 . L	0,60379 . L
0,606	1,100 . L_{11}*	0,66646 . L_{11}*
0,640	1,150 . L	0,73742 . L
0,676	1,200 . L_{12}*	0,81071 . L_{12}*
0,711	1,250 . L	0,88842 . L
**0,747	1,300 . L_{13}*	0,97091 . L_{13}*
0,784	1,350 . L	1,05833 . L
0,822	1,400 . L	1,15090 . L
0,861	1,450 . L	1,24884 . L
0,902	1,500 . L	1,35241 . L
0,943	1,550 . L	1,46186 . L
0,986	1,600 . L	1,57747 . L
0,995	1,610 . L	1,60135 . L
1,000	1,616 . L	1,61580 . L
1,003	1,620 . L	1,62549 . L
1,030	1,650 . L	1,69952 . L
1,075	1,700 . L	1,82832 . L
1,122	1,750 . L	1,96419 . L
1,171	1,800 . L	2,10747 . L
1,191	1,820 . L	2,16694 . L
1,221	1,850 . L	2,25853 . L
1,252	1,880 . L	2,35305 . L
1,272	1,900 . L	2,41773 . L
1,294	1,920 . L	2,48378 . L
1,326	1,950 . L	2,58548 . L
1,359	1,980 . L	2,69040 . L
1,381	2,000 . L	2,76220 . L
1,404	2,020 . L	2,83549 . L
1,438	2,050 . L	2,94832 . L

Digitized by Google

Quotient durch Division der Abscisse durch die Ordinate hervorgebracht.	Ordinaten.	Abscissen.
1,473	2,080. L	3,06470. L
1,497	2,100. L	3,14431. L
1,522	2,120. L	3,22559. L
1,558	2,150. L	3,35067. L
1,596	2,180. L	3,47967. L
1,623	2,200. L	3,56791. L
1,648	2,220. L	3,65797. L
1,687	2,250. L	3,79657. L
1,728	2,280. L	3,93948. L
1,755	2,300. L	4,03722. L
1,783	2,320. L	4,13697. L
1,822	2,350. L	4,29047. L
1,879	2,380. L	4,44872. L
1,899	2,400. L	4,55695. L
1,929	2,420. L	4,66739. L
1,974	2,450. L	4,83734. L
2,021	2,480. L	5,01250. L
2,053	2,500. L	5,13229. L
2,085	2,520. L	5,25453. L
2,134	2,550. L	5,44259. L
2,185	2,580. L	5,63646. L
2,219	2,600. L	5,76901. L
2,254	2,620. L	5,90426. L
2,307	2,650. L	6,11235. L
2,361	2,680. L	6,32683. L
2,398	2,700. L	6,47347. L
2,435	2,720. L	6,62310. L
2,492	2,750. L	6,85328. L
2,551	2,780. L	7,09053. L
2,590	2,800. L	7,25272. L

Digitized by Google

Quotient durch Division der Abscisse durch die Ordinate hervorgebracht.	Ordinaten.	Abscissen.
2,630	2,820. L	7,41823. L
2,692	2,850. L	7,67281. L
2,755	2,880. L	7,93520. L
2,798	2,900. L	8,11458. L
2,842	2,920. L	8,29761. L
2,886	2,940. L	8,48436. L
2,931	2,960. L	8,67489. L
2,970	2,980. L	8,86931. L
2,999	2,990. L	8,96798. L
3,026	3,000. L	9,06766. L

Der Gebrauch vorstehender Tabelle zu Zeichnung einer Kettenlinie möge durch folgendes Beispiel erläutert werden.

Es sey die Entfernung der Aufhängepunkte AB = 80, folglich die größte Ordinate AC = ½ AB = 40 und die ihr zugehörige Abscisse CD als die Entfernung des Scheitelpunktes D von AB = 30 Theile des dazu gehörigen Maßstabes. Die hierzu gehörige Kettenlinie soll gezeichnet werden.

Auflösung.

1) Man dividire die Länge der gegebenen Abscisse CD durch die bekannte ihr zugehörige Ordinate

$$AC = \frac{30}{40} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

2) Suche in der Tabelle den nächsten Quotienten (er ist 0,747 in der Tabelle mit ** bezeichnet und in derselben Zeile ist auch die ihm entsprechende Abscisse und Ordinate, 1,300. L und 0,97091. L anzutreffen).

Digitized by Google

3) Um den Werth von L zu bestimmen, setze man 1,3.L, der gegebenen Ordinate, nämlich 40 gleich und bringe 1,3 durch Division von L, so erhält man:

$$1{,}3 \cdot L = 40$$

$$L = \frac{40}{1{,}3} = 30{,}7691.$$

4) Weil sich nun in der Tabelle alle Abscissen und Ordinaten auf den Werth von L beziehen, so wähle man, nach Maßgabe der bezweckten Genauigkeit, näher oder weiter von einanderliegende zusammengehörige Coordinaten, z. B. für Fig. 180. die in der Tabelle mit 1*; 2*; 3* ꝛc. bezeichneten und multiplicire jede derselben mit dem gefundenen Werthe L, das ist, mit 30,7691, so erhält man:

Für	ist die Ordinate		und die Abscisse	
1.*	0,100.30,7691	= 3,07	0,005 . 30,7691	= 0,15
2.*	0,2 . 30,7691	= 6,15	0,02007.30,7691	= 0,62
3.*	0,3 . 30,7691	= 9,23	0,04534.30,7691	= 1,39
4.*	0,4 . 30,7691	= 12,31	0,08107.30,7691	= 2,49
5.*	0,5 . 30,7691	= 15,38	0,12763.30,7691	= 3,93
6.*	0,6 . 30,7691	= 18,46	0,18546.30,7691	= 5,76
7.*	0,7 . 30,7691	= 21,54	0,25517.30,7691	= 7,85
8.*	0,8 . 30,7691	= 24,16	0,33743.30,7691	= 10,38
9.*	0,9 . 30,7691	= 27,69	0,43309.30,7691	= 13,32
10.*	1, . 30,7691	= 30,77	0,54308.30,7691	= 16,70
11.*	1,1 . 30,7691	= 33,84	0,66646.30,7691	= 20,51
12.*	1,2 . 30,7691	= 36,92	0,81071.30,7691	= 24,95
13.*	1,3 . 30,7691	= 40	1,05833.30,7691	= 29,85

Die Verzeichnung der Kettenlinie ist nunmehr folgende:

Man ziehe die Linie AB, fälle aus C die Perpendiculare CD abwärts; nehme für $\frac{1}{2}$ AB = 40 Theile vom Maßstabe p′q′, trage selbige aus C nach A und B; so wie 30 Theile für die Entfernung des Scheitelpunktes D

von AB, aus C nach D. Gebe sodann von dem Scheitel D an gerechnet:

der 1sten Abscisse Dk nach Tab. II. 0,15 des Maßstabes
" 2ten " Dg " " " 0,62 " "
" 3ten " Dd " " " 1,39 " "
" 4ten " Dx " " " 2,49 " " ꝛc.

Ferner trage man die

zur Absc. Dk gehörige Ordin. = 3,07 aus k nach l und m
" " Dg " " = 6,15 " g " h " i
" " Dd " " = 9,23 " d " e " f
" " Da " " =12,31 " a " b " c ꝛc.

und verbinde die erhaltenen Punkte A, F, I, M, P, S ꝛc. durch eine krumme Linie, so erhält man die zur gegebenen Entfernung der Aufhängepunkte gehörige Kettenlinie, welche den Scheitelpunkt in D schneidet, und für den practischen Gebrauch hinlängliche Genauigkeit gibt.

§. 167.

Es ist zuweilen nothwendig, Kreisbogen für einen gegebenen Halbmesser zu ziehen, wozu kein Centrum angenommen werden, und dieselben daher blos durch Bestimmung einzelner Punkte mittelst Abscissen und Ordinaten construirt werden können. Hierzu dienet die Auflösung folgender Aufgabe.

146ste Aufgabe.

Der Halbmesser xy eines Kreisbogens Fig. 181. ist gegeben; es sollen mehrere in ihm liegende Punkte, mit Hülfe angenommener Abscissen und Ordinaten bestimmt, und diese Punkte durch eine dem Kreisbogen zugehörige krumme Linie, verbunden werden.

Auflösung.

Es bezeichne c den Berührungspunkt der Abscissenlinie mn und des zu zeichnenden Kreises. Man messe entweder

den gegebenen Halbmesser auf einem angenommenen Maßstabe, welche Länge in der folgenden Tabelle mit r bezeichnet ist und multiplicire mit dessen Maße, alle in der Ordnung folgenden Abscissen und Ordinaten. Oder besser, man betrachte die Länge des gegebenen Halbmessers xy, selbst als Maßstab und theile ihn so ein, daß Hundert- oder Tausendtheilchen davon abgenommen werden können. In Bezug auf letztere Bedingung wird r als die Länge des Halbmessers in der Tabelle = 1.

Die von c aus, in der Ordnung folgenden Abscissen ca, cd ꝛc.	Die ihnen zugehörigen Ordinaten ak, dc ꝛc.	Die von c aus, in der Ordnung folgenden Abscissen.	Die ihnen zugehörigen Ordinaten.
0,05 . r	0,001 . r	0,55 . r	0,165 . r
0,10 . r	0,005 . r	0,60 . r	0,200 . r
0,15 . r	0,011 . r	0,65 . r	0,240 . r
0,20 . r	0,020 . r	0,70 . r	0,286 . r
0,25 . r	0,032 . r	0,75 . r	0,338 . r
0,30 . r	0,046 . r	0,80 . r	0,400 . r
0,35 . r	0,063 . r	0,85 . r	0,483 . r
0,40 . r	0,083 . r	0,90 . r	0,564 . r
0,45 . r	0,107 . r	0,95 . r	0,687 . r
0,50 . r	0,134 . r	1,00 . r	1,000 . r

Nun nehme man die in der Ordnung folgenden Abscissen 0,05 . r; 0,10 . r; 0,15 . r ꝛc. vom Maßstabe oder vom eingetheilten Halbmesser xy, trage sie aus c nach a und b, nach d und e, nach f und g ꝛc. und errichte in den gefundenen Punkten a, b, e, d ꝛc. Perpendicularen; gebe jeder correspondirenden Ordinate, wie ak und bl, do und ep ꝛc., die in der Tabelle enthaltenen Theile 0,001 . r, 0,005 . r, 0,011 . r ꝛc., so liegen sämmtliche bestimmte Punkte in der Peripherie des zum Halbmesser xy gehörigen Kreises.

Digitized by Google

Anwendungen der Cykloide, Epicykloide, Abwickelungs- und archimedischen Spirallinie, zur vortheilhaftesten Bildung der Zähne, Hebedaumen und Stäbe, bei Räderwerken.

§. 168.

Wenn an dem Umfange zweier Räder, die an verschiedenen Axen befindlich sind, einzeln stehende Hervorragungen dergestalt in einander greifen, daß bei Umdrehung des einen Rades, das andere ebenfalls in Bewegung gesetzt wird, so heißt diese Vorrichtung ein Räderwerk.

Sind diese Hervorragungen in den Richtungen der Halbmesser des Rades angebracht, so nennt man sie Zähne, und das Rad, woran selbige befindlich sind, heißt ein Stern- oder Stirnrad. Stehen sie hingegen auf der Ebene des Rades normal, so werden es Kämme und das Rad ein Kamm- oder Kronrad genannt. Sind endlich zwei runde, an einer Welle parallel angebrachte Scheiben durch cylindrische Stöcke, die man Triebstöcke nennt, verbunden, worein die Zähne oder Kämme eines Rades eingreifen, so heißt solches ein Trilling. Uebrigens wird das kleinste von zwei in einander greifenden Rädern, ein Getriebe genennt, so wie große Trillinge den Namen Drehlinge erhalten.

Sind endlich die Triebstöcke nicht zwischen parallele Scheiben eingesetzt, sondern in dem Umfange der Welle ausgearbeitet, so entstehet ein Kumpf, dessen Zähne Stäbe genennt werden. Auch gibt es Räder, deren Ebenen nicht senkrecht auf einander stehen, sondern sich unter einem spitzen oder stumpfen Winkel schneiden; man nennt sie deshalb conische Räder.

Die vortheilhafteste Gestalt der Zähne und Kämme bei einem gut construirten Räderwerke muß so beschaffen

seyn, daß das Eingreifen des einen und das Lösen des andern Rades die wenigste Reibung verursacht.

Sie ändert sich deshalb, je nachdem Zähne mit Zähnen, Zähne mit Kämmen, Zähne mit Triebstöcken und Kämme mit Triebstöcken in Berührung kommen, wobei die Construction der Cykloide und Epicykloide ꝛc. ihre Anwendung findet.

Zur Erläuterung des oben Vorgetragenen ist es nothwendig, die Benennungen kennen zu lernen, welche bei Zeichnung und Theilung der Räderwerke vorkommen.

Es sey deshalb Fig. 182. ein Stirnrad, welches mit seinen Zähnen TRU und IFK in die Triebstöcke L, A, O des ihm zugehörigen Getriebes eingreift. In der Zeichnung heißt sodann:

Der aus dem Mittelpunkte C des Stirnrades beschriebene Kreis, welcher das Centrum A des Triebstockes schneidet, und wovon YX ein Bogen ist, der Theilriß oder Theilkreis und AC bis zum Theilkreise, der Halbmesser des Stirnrades.

Ferner wird BD oder der Theil, welchen der Zahn von diesem Kreise einnimmt, die Brust oder Stärke desselben, so wie die Entfernung der Mitte eines Zahnes oder Stockes von der Mitte des nächstfolgenden, wie EP oder AO, die Theilung der Zähne oder Stöcke genennt.

Berührt der Triebstock A den Zahn BFD bei B, so bleibt zwischen dem nächsten Zahn QRN und dem Triebstocke MB ein kleiner Zwischenraum NM (der Spielraum genennt) übrig, welcher ungefähr $\frac{1}{48}$ der Theilung beträgt.

Endlich heißt AG der Halbmesser des Theilkreises vom Getriebe und ein Bogen des letztern wie AO (= der Theilung des Rades PE), die Theilung des Getriebes.

Die gerade Linie GAC, welche den Mittelpunkt des Stirnrades G und des Getriebes C verbindet und zugleich

Digitized by Google

den Berührungspunkt beider Theilungskreise A schneidet, heißt die Mittelpunkt, oder Central-Linie.

Endlich ist noch zu bemerken, daß, wenn das Getriebe durch das Stirnrad in Bewegung gesetzt wird, die Berührung in dem Zeitmomente geschieht, wenn das Centrum A des Triebstocks in die Mittelpunktslinie zu liegen kommt; setzt hingegen obiges Getriebe das Stirnrad in Bewegung, so verläßt der Zahn den Triebstock unter derselben Bedingung.

Uebrigens werden die Räderwerke dergestalt eingerichtet, daß von sämmtlichen Zähnen und Triebstöcken während der Bewegung, nur Ein Zahn den nächsten Triebstock berührt, die übrigen aber von der Berührung frei bleiben.

§ 169.

147ste Aufgabe.

Aus der gegebenen Theilung der Zähne und Triebstöcke eines Rades und Drehlings, die Gestalt derselben anzuordnen, unter der Bedingung, daß der Drehling von dem Rade in Bewegung gesetzt wird.

Auflösung.

Ist die Zahl der Zähne und die Größe ihrer Theilung gegeben, so kann hieraus der Halbmesser des Theilrisses gefunden werden, indem man die Anzahl der Zähne oder Stöcke mit der in Zollen ausgedrückten Theilung multiplicirt und das erhaltene Product durch 6,283 dividirt.

Es sey z. B. in Fig. 182. die Anzahl der Zähne eines Stirnrades = 25; die Anzahl Stöcke des Getriebes, in welches das Stirnrad eingreift = 6 und die Theilung = 4 Zoll, so ist der Halbmesser des Theilrisses vom Stirnrade $CA = \frac{4 \times 25}{6,283} = 15,9$ Zoll. Und der Halb-

messer des Theilrisses vom Getriebe

$$GA = \frac{4 \times 6}{6{,}283} = 3{,}8 \text{ Zoll.}$$

Weil jedoch die Erfahrung zeigt, daß bei anhaltender Bewegung die Stöcke des Getriebes mehr als die Zähne des eingreifenden Stirnrades leiden, so werden erstere stärker als letztere gemacht und für den Spielraum MN ungefähr $\frac{1}{48}$ der Theilung genommen. Gewöhnlich setzt man die Dicke der Stöcke der halben Theilung gleich (in gegenwärtigem Beispiel = 2 Zoll). Aus der Theilung, ferner aus der Dicke des Stocks und dem gegebenen Spielraum, ist nunmehr die Dicke der Zähne für das eingreifende Rad zu bestimmen; wenn man die Dicke des Stocks + dem Spielraume von der gegebenen Länge der Theilung abzieht. Für dieses Beispiel ist sie, $4 - (2 + \frac{1}{48})$ ungefähr $1\frac{11}{12}$ Zoll.

Nach dieser vorausgegangenen Berechnung, kann nunmehr die epicykloidische Form der Zähne des Stirnrades, als Chablone betrachtet, durch folgende Construction bestimmt werden.

Auf einem glattgehobelten Brete, von gehöriger Breite und Länge, ziehe man die Mittelpunktslinie CG; beschreibe aus C mit dem Halbmesser des Stirnrades AC = 15,9 einen Kreisbogen XY; trage den gefundenen Halbmesser des Getriebes = 3,8 Zoll aus A nach G und beschreibe aus G den Bogen VW, welcher jenen in A berührt, so sind selbige Bogen beider Theilrisse für obige Räder.

Um die Theilung auf den Bogen VW und XY zu erhalten, zerlege man die Länge derselben, (hier 4 Zoll), in eine beliebige Menge kleiner Theile und trage ihre Anzahl mittelst des Handzirkels, aus A auf beide Bogen nach O und 3; verbinde A und O durch die Sehne AO; beschreibe mit der halben Dicke des Stockes, (hier mit 2 Zoll), aus A und O den Umfang zweier in gehöriger Entfernung aufeinander folgenden Triebstöcke, so wird der letztere Umfang die Sehne AO in o schneiden und ein aus C durch

Digitized by Google

o bis zur Mittelpunktslinie CG gezogener Bogen on, die Länge des Zahnes HF begrenzen.

AX ist nunmehr als ein Bogen des Grundkreises, so wie AW als ein Bogen des erzeugenden Kreises und A als der Anfangspunkt einer Epicykloide zu betrachten, und der Theil $A\alpha'\beta'\gamma'$ derselben, nach der in §. 155. angegebenen Construction zu bestimmen, indem man die Bogen $AO = A3$ in eine beliebige Anzahl (hier in 3) gleiche Theile $A\alpha = \alpha\beta = \beta O$ und $A1 = 1,2 = 2,3$ theilt; aus C, durch die Theilungspunkte α, β, O concentrische Bogen und durch 1, 2, 3 verlängerte Radien ziehet. Hierauf nehme man $a\alpha$ in den Zirkel, trage diese Entfernung aus a' nach α'; eben so $b\beta$ aus b' nach β' und cO aus c' nach γ', wo die krumme Verbindungslinie der Punkte $A\alpha'\beta'\gamma'$, der epicykloidische Bogen für die gegebene Theilung ist.

Ferner wird die halbe Dicke des Zahns ($1\frac{1}{2} : 2 = \frac{2}{3}$ Zoll) aus B nach E und D getragen und aus C und E der verlängerte Halbmesser CF gelegt, so ist die Bruststärke und Mittellinie des Zahns bestimmt.

Die epicykloidische Form Be seines obern Theils wird endlich erhalten, indem man den Halbmesser des Stockes A in den Zirkel nimmt, und aus mehrern Punkten des gefundenen Bogens α', β', γ' der Epicykloide, halbe Kreise beschreibt, durch deren äußerste Punkte der Bogen Be mit $A\alpha'\beta'\gamma'$ parallel gezogen werden kann.

Die entgegengesetzte Krümmung Dg, ist durch Umschlagung von der Mittellinie aus zu erhalten und endlich die Endpunkte e und g bogenförmig zu verbinden, wodurch der obere Theil des Zahnes, über dem Theilrisse XY bestimmt ist.

Für den untern Theil des Zahns BIKD, wird EH etwas größer als die halbe Dicke des Triebstockes, von E aus, auf AC abwärts nach H getragen; aus C durch H der Bogen IK gezogen und den Seitenlinien BI und DK die Richtung nach C gegeben.

Digitized by Google

Zur leichtern Bildung der Zähne fertige man nunmehr nach der Form IBegDK eine Chablone, wodurch man aller weitern Construction überhoben ist.

1ste Anmerkung. Sollten die Durchschnittspunkte e und g, unterhalb des concentrischen Bogens no zu liegen kommen, so muß die Stärke des Zahns BD entweder vergrößert oder die Theilung AO = A3 verkleinert werden, weil außerdem der vorhergehende Zahn den anliegenden Stock eher verläßt, als der nachfolgende Zahn seinen Triebstock ergreift.

2te Anmerkung. Die Construction der Chablone für Zähne, ist leichter und zum practischen Gebrauch hinreichend genau zu fertigen, wenn man auf den Theilriß des Getriebes, die Theilung AL trägt; sodann die Sehne AL ziehet und mit dem Halbmesser des Stocks Lu, den Umfang desselben beschreibt; ferner aus C durch u den Bogen un ziehet; aus A die Summe der halben Dicke des Stocks AM, ferner des Spielraums MN und die halbe Zahndicke NP = $(1 + \frac{1}{16} + \frac{3}{32}) = 1\frac{7}{32}$ Zoll aus A nach P trägt und durch C und P den verlängerten Halbmesser CR ziehet. Man nehme nun ferner Rv = Ru, fasse Au in den Zirkel und beschreibe aus u und Q, so wie aus v und N, Bogen, die sich in , und ð schneiden, ziehe mit derselben Oeffnung aus , und ð die Bogen Nv und Qu, so erhält man die Form des oberen Zahntheiles, welcher von dem epicykloidischen Bogen nicht beträchtlich abweicht. Die Construction des untern Zahntheiles bleibt die Vorige.

§. 170.

148ste Aufgabe.

Die Gestalt der Zähne für einen Kammbaum, wenn selbiger einen Drehling AOPQ Fig. 183. in Bewegung setzen soll (oder einer gezahnten Stange) zu construiren.

Auflösung.

Es sey die Theilung für die Stöcke des Drehlings gegeben, woraus durch die bekannte Anzahl derselben, der Halbmesser und mit Hülfe des Spielraums, nach Anleitung

Digitized by Google

des 169sten §. die Breite der Zähne am Kammbaume gefunden werden kann.

Man beschreibe nunmehr mittelst des gefundenen Halbmessers den Theilriß AOPQ ꝛc., ziehe auf den Berührungspunkt A, die Linie AG und durch A, den Theilriß des Kammbaums ZX rechtwinklich.

Ferner betrachte man den Theilriß des Drehlings, als den Erzeugungskreis einer Cykloide und zeichne nach Anleitung des 153sten §. aus dem Anfangspunkte A, den der Cykloide zugehörigen Bogen AA′; so können nunmehr aus einigen in AA′ angenommenen Punkten, mit dem Halbmesser eines Triebstockes, Halbkreise wie in §. 169. beschrieben werden, deren entfernteste Punkte durch eine mit AA′ gleichlaufende Linie zu verbinden sind.

Um die Länge des oberen Theiles der Zähne am Kammbaume zu erhalten, verbinde man die Endpunkte der Theilung A und O, durch die Linie AO, so wird selbige den Umfang des Triebstockes O in o schneiden. Aus letzterem Punkte o ziehe man die Linie oE mit XZ gleichlaufend, so ist die kleinste Länge der Zähne dadurch bestimmt, und es kann, nachdem die Breite des Zahnes aus D nach F getragen worden, aus dessen Mitte die Krümmung FH mittelst Umschlagung DE gleich gemacht werden. Uebrigens verstehet es sich von selbst, daß die Theilung der Kammstange (DT = TK ꝛc.) der Theilung des Trillings AO gleich gemacht werden muß.

§. 171.

149ste Aufgabe.

Ein Kammbaum soll durch ein Getriebe fortgeschoben und hierzu die erforderliche Gestalt der Zähne für das Getriebe und den Kammbaum construirt werden.

Auflösung.

Nachdem der Halbmesser des Getriebes mittelst der

gegebenen Theilung bestimmt worden ist, beschreibe man aus G Fig. 185. den Theilriß MAN und ziehe an den Berührungspunkt A die Linie ZX auf GA rechtwinklich; befestige hierauf, in dem angenommenen Punkte v, eine feine Schnur, spanne selbige bis A und ziehe mittelst ihrer Abwickelung den Evolventen-Bogen AA′ oder construire letzteren, nach Anleitung des 164sten §., indem in Fig. 184. der Halbmesser Gv′ = Gv Fig. 185. gezogen, ferner in v′ die Normale v′x′ errichtet; der Bogen v′A′ = vA durch angenommene kleine Theilchen ausgemessen und ihre Anzahl aus v′ nach w′ getragen werden. Theile sodann v′A′, so wie v′w′ in eine gleiche Anzahl Theile v′1 = 1,2 = 1,3 ꝛc. und vI = I,II = II,III ꝛc., ziehe die Halbmesser G′,1, G2, G3 ꝛc., errichte in 1, 2, 3, 4 Normalen nach 4a′ = vI; 3b′ = v′II; 2c′ = v′III ꝛc. und lege durch die Punkte A′a′b′c′d′w′ den Evolventenbogen A′A″

In Fig. 185. wird nun ferner die gegebene Theilung der Zähne aus A nach O getragen und aus G mit GO der Bogen OD bis zur Abwickelungslinie AA′ beschrieben, wodurch sich die kleinste Höhe AD vom obern Zahntheile ergibt. Verlängert man den Halbmesser GA des Getriebes bis E, so ist die gerade Linie AE die Seitenfläche des Zahnes an der Stange und zugleich die kleinste Länge desselben. Aus der gegebenen Breite des Zahnes AF vom Getriebe ist nunmehr auf dieselbe Weise, wie in den vorhergehenden Aufgaben gezeigt wurde, die andere Seite FH der erstern AD, ähnlich gleich zu bestimmen.

Die Gründe für obige Construction sind folgende: Indem der Berührungspunkt A des Zahnes vom Getriebe bis M fortrückt, so wird derselbe Berührungspunkt des Kammes bis O fortgeschoben, weil der Bogen AM = AO gemacht wurde. Auch ersiehet man aus der Zeichnung, daß die Berührung zwischen den Kämmen und Zähnen, nur in der Linie XZ geschehen kann.

Digitized by Google

§. 172.

150ste Aufgabe.

Die vortheilhafteste Gestalt der Zähne für ein Getriebe und Stirnrad anzugeben, wenn das Getriebe durch letzteres in Bewegung gesetzt wird; ferner wenn die Theilung und die Breite der Zähne gegeben ist und ihre Berührung nicht in der Mittelpunktslinie erfolgen soll Fig. 186.

Auflösung.

Man ziehe die Centrallinie CG und aus C den Theilriß ZX des Stirnrades, mit dem berechneten Halbmesser AC. Auf gleiche Weise beschreibe man aus G, den Theilriß VW des Getriebes, welcher ersteren in A berührt.

Hierauf wähle man einen beliebigen Punkt b in ZX, construire einen epicykloidischen Bogen bdx, wovon der Erzeugungskreis GOAI den Halbmesser AG zum Durchmesser hat, trage aus b nach h und aus h nach e die halbe Dicke des Zahns und lege durch C und h die Linie Cd, bis selbige den Bogen bx in d schneidet. Durch Umschlagung der Entfernungen von der Mittellinie hd, kann sodann der Bogen ed dem Bogen bd, ähnlich gleich gemacht werden.

Man setze nun ferner den Zirkel in C, beschreibe mit der Entfernung Cd den Bogen dO, bis an den erzeugenden Kreis GOAI und ziehe OC, so ist hH die Theilung des Stirnrades, weshalb die halbe Breite des Zahnes aus H nach B und E zu tragen und der obere Zahntheil BOE dem bereits bestimmten bde gleich zu machen ist.

Von einem willkührlich angenommenen Punkte f, ist nunmehr auf dem Theilungskreis VW die gegebene halbe Breite der Stäbe, aus f nach l und von l nach g zu setzen, so wie von f aus der Bogen fnk einer Epicykloide zu beschreiben, deren Erzeugungskreis den Halbmesser AC,

Digitized by Google

vom Theilungskreise des Rades, zum Durchmesser hat. Hierauf ziehe man durch G und l die Linie Gk, bis sie den Bogen in k schneidet und bestimme durch Umschlagung der Entfernungen von der Mittellinie, die Krümmung der andern Hälfte des Zahns gmk.

Um die möglichst kleinste Länge lp des obern Theils zu erhalten, nehme man auf dem Theilrisse ZX des Rades, die Entfernung BQ = hH und ziehe die Linie QC, so wird durch diese Linie, der Erzeugungskreis AYC in P geschnitten und dadurch der Punkt P bestimmt, in welchem der Zahn mit dem Stabe zuerst in Berührung kommt.

Mit dem Halbmesser GP beschreibe man endlich den Bogen mon, so ist lo die kleinste Länge des obern Theils der Stäbe, die noch um etwas durch die Abrundung npm vergrößert werden können.

Die Halbmesser GL und Cu sind willkührlich, jedoch allezeit kleiner als GO und AC anzunehmen und die Seitenlinien der untern Zahntheile, wie kL und Ew, nach dem Mittelpunkte G und C zu ziehen, wodurch ihre Gestalt bestimmt ist.

§. 173.

151ste Aufgabe.

Den Zähnen eines Stirnrades und Getriebes die vortheilhafteste Gestalt zu geben, wenn das Stirnrad durch das Getriebe in Bewegung gesetzt werden soll, und außer dem Halbmesser der Räder, die Theilung und die Breite der Zähne gegeben sind, auch die Berührung der Zähne vor der Mittelpunktslinie geschiehet Fig. 187.

Auflösung.

Man ziehe zuerst, wie in der vorhergehenden Aufgabe, die Mittelpunktslinie CG, beschreibe auf dem Theilkreise des Getriebes, aus einem willkührlich angenommenen

Punkte f, eine Epicykloide, indem man VABW als den Grundkreis und AYC als den Erzeugungskreis betrachtet; trage die Hälfte der Zahnbreite aus f nach l und g; ziehe durch G und l, die Linie Gk und mache kg den Bogen fk ähnlich gleich.

Dasselbe Verfahren wende man auch zur anfänglichen Bildung des Zahnes bde an; indem man den Punkt b willkührlich annimmt, ZX als den Grundkreis und GOAG als den Erzeugungskreis betrachtet. Hierauf mit dem Halbmesser Gk, den Bogen kP bis P beschreibt, wodurch der Punkt bestimmt wird, in welchem der Zahn des Stirnrades den Stab des Getriebes verläßt.

Aus P ist nunmehr der Halbmesser GP zu ziehen, welcher den Theilriß des Getriebes in H schneidet. Von letzterem Punkte aus, trage man die halbe Breite des Stabes nach E und B, so wie die gegebene Theilung aus B nach K und ziehe GK, wodurch der Erzeugungskreis GOAG in O geschnitten und der Ort bezeichnet wird, in welchem alle folgende Zähne des Getriebes, die Stäbe des Stirnrades ergreifen. Um die kleinste Länge oh der Stäbe zu bestimmen, beschreibe man mit dem Halbmesser CO Bogen wie nm, die gemeiniglich mit einem flachen Bogen npm geschlossen werden.

Weil endlich der Punkt f willkührlich angenommen wurde, so ist es möglich, daß der Zahn fkg von BPE nicht die gehörige Entfernung hat. In diesem Falle ist derselbe, nachdem die Construction an ihm vollzogen worden ist, hinwegzulassen.

Anmerkung. Die Zähne eines Kammrades werden auf eine ähnliche Art, wie die der Stirnräder construirt, nur daß man statt des Theilrisses YZ Fig. 182. eine normale Linie auf den Halbmesser CA durch den Punkt A ziehet, und nachdem AO = A3 gemacht worden ist, in den Punkten 1, 2, 3 ꝛc. Perpendicularen errichtet, bis sie die ihnen zugehörigen Bogen schneiden, wo endlich die Durchschnittspunkte mittelst einer krummen Linie zu verbinden sind ꝛc.

Digitized by Google

Von Stampfern und der Construction ihrer Hebezapfen.

§. 174.

Wenn ein prismatischer Körper VW Fig. 188., an welchem ein Hebezapfen AB befindlich ist, durch den an einer Welle angebrachten Hebedaumen oder Hebling AD bis H gehoben wird und nach Verlassung des Hebedaumes frei herabfällt, so wird dieser Körper ein Stampfer oder Pochstempel genennt.

Weil aber während der Zeit des Herabfallens, bis zu dem Zeitmomente, in welchem der Hebezapfen von den Daumen aufs neue ergriffen wird, die Kraft an der Welle vergeblich wirken müßte, so werden mit letzterer mehrere Daumen und Stampfer dergestalt verbunden, daß wenn der Zapfen des einen Stampfers seinen Hebedaumen verläßt, der folgende Daumen den ihm zugehörigen Zapfen ergreift.

Die vorzüglichste Gestalt der Hebedaumen, um das Gewicht des Stempels stets senkrecht und in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte der Welle wirken zu lassen, ist die Evolvente, wie solches nach mechanischen Gründen erwiesen werden kann.

152ste Aufgabe.

Die krummlinige Gestalt eines Hebedaumens an der Welle für eine Stampfmühle zu bestimmen.

Auflösung.

Es sey AB Fig. 188. ein wagerechter Hebezapfen in seinem niedrigsten Stande, zugleich liege in dessen Verlängerung, der Halbmesser AG des Theilrisses IAM. Man betrachte letztern als die Evolute oder den Umwicklungskreis. Wird nun aus A die dazu gehörige Evolvente AD beschrieben und nach ihr der Daumen gestaltet, so wird

Digitized by Google

zur Fortbewegung des Zapfens, in allen Lagen des Daumens, nur einerlei Kraft am Umfange der Welle erforderlich seyn. Kommt während der Bewegung der Berührungspunkt A nach M, so ist nach den Eigenschaften der Abwickelungslinie AM = AH, und D befindet sich in demselben Zeitmomente in H.

Es bezeichne deshalb GA, die horizontale Entfernung des ersten Angriffspunktes vom Hebedaumen. Man ziehe den Theilkreis AMI durch A; mache die Länge des Bogens AM, der Erhebungshöhe AH vom Stampfer gleich und theile sowohl die Linie AH, als den Bogen AM in eine beliebige, aber gleiche Anzahl Theile und beschreibe, wie bereits gezeigt worden ist, entweder mittelst eines Fadens oder durch Construction aus M, die Evolvente MH. Der Halbmesser der Welle GE kann willkührlich, jedoch kleiner als der Halbmesser des Theilrisses GA angenommen und der Umfang des Wellbaumes sodann beschrieben werden. HK ist ebenfalls beliebig z. B. $\frac{1}{2}$ von AH anzunehmen, und K mit G durch die Linie GK zu verbinden. Nun ist die nothwendige Breite des Daumens am Umfange der Welle, aus F nach f zu tragen und M mit f mittelst eines Bogens zu verbinden.

Endlich ergibt sich die kürzeste Länge der Hebezapfen BA, wenn man die Entfernung HG aus G nach d trägt. In Fig. 188. bezeichnet AB den niedrigsten und HH' den höchsten Stand des Hebezapfens.

Zusatz. Um das Abschleifen des Hebedaumens MH zu vermindern, werden am äußersten Ende desselben kleine metallene Röllchen angebracht, die sich um eiserne Bolzen drehen. Bei dieser Einrichtung muß der Theilkreis durch den Mittelpunkt der Rollen angenommen und die Evolvente aus dem Mittelpunkte der Rolle construirt werden, welche sodann mittelst halber Kreise, wie bei den Epicykloiden gleichlaufend, an den Punkt A zu ziehen sind.

Digitized by Google

§. 175.

153ste Aufgabe.

Die erforderliche Gestalt der Daumen an einer Welle zu bestimmen, wenn die Erhebungshöhe AF einer Last, ferner der Halbmesser des Theilrisses AC und die Theilung AM = AF am Umfange der Welle Fig. 189. gegeben ist und die Richtung der verticalen Hebungslinie, den Endpunkt des Halbmessers treffen soll.

Auflösung.

Die Höhe AF wird in eine willkührliche Anzahl gleicher Theile AB = BD = DE ꝛc., so wie der Bogen der gegebenen Theilung AF′ in dieselbe Anzahl gleicher Theile AB′ = BD′ = DE′ ꝛc. getheilt. Je mehr Theile angenommen werden, desto größer ist die Genauigkeit der zu entwerfenden krummen Linie. Aus dem Mittelpunkte C werden nach den Punkten B, D, E, F Linien CB, CD, CE, CF gezogen, und der Bogen B′b′ = Ab; D′d′ = Ad; E′e′ = Ae und F′f′ = Af gemacht, und durch C und b′, C und d′, C und e′ ꝛc. die Linien CB″, CD″, CE″, CF″ gelegt. Man beschreibe nunmehr aus C mit CB den Bogen BB″, ferner mit CD den Bogen DD″, mit CE den Bogen EE″, endlich mit CF den Bogen FF″, bis solche die verlängerten Linien Cb′, Cd′, Ce′ ꝛc. in B, D″, E″, F″ schneiden, lege durch letztere Punkte die krumme Linie A′B″D″E″F″ und ziehe aus F″, in der Richtung nach C, die Linie F″f′, so ist die Gestalt des Hebedaumens für obige Bedingung bestimmt.

Den Hebedaumen kann auch die Gestalt wie P und Q gegeben werden, indem man aus dem Punkte F‴ eine Tangente an den nächsten Theilpunkt G ziehet und den Daumen eine beliebige Höhe F‴H gibt.

Digitized by Google

Um den Grund dieses Verfahrens einzusehen, denke man sich, während der Bewegung der Welle, den Punkt B′ bis A fortgerückt, so wird b′ nach b und B″ nach B zu liegen kommen, folglich ist von der Theilung der Abwickelungsbogen AB′ durch A gegangen, indem während dieser Zeit die Last von A nach B gehoben worden ist. Eben so steigt die Last bis D, während der Punkt D′ bis A fortrückt. Hieraus folgt im Allgemeinen, daß, wenn in irgend einem Zeitabschnitte eine gewisse Anzahl Theile von AB′ durch A gehen, die Last um eben so viel Theile von AB gehoben wird.

§. 176.

154ste Aufgabe.

Die vortheilhafteste Gestalt der Hebebaumen an einer Welle zu bestimmen, wenn der Halbmesser der Welle, ferner die Theilung auf ihrem Umfange und die Erhebungshöhe gegeben ist; letztere aber nicht am Ende des horizontalliegenden Halbmessers, sondern von einem Punkte A der Theilung aus Fig. 190. vertical gehoben werden soll.

Auflösung.

Aus dem gegebenen Punkte A der Welle errichte man eine vertikale Linie, gebe ihr die Länge der Erhebungshöhe AF Fig. 190. und trage die Theilung aus A nach F′; theile nach Anleitung der vorhergehenden Aufgabe sowohl die Linie AF, als den Bogen AF′ in mehrere (hier in 4) gleiche Theile AB = BD = DE ꝛc. und A′B′ = B′D′ = D′E′ ꝛc.; ziehe die Linien CA, CB, CD, CE, CF; trage A′b aus B′ nach b′; Ad aus D nach d′; Ae aus E′ nach e′; AF aus F′ nach f′; ziehe von C durch b′, d′, e′, f′ Linien und beschreibe mit dem Umfange der Welle die concentrischen Bogen BB″, DD″, EE″, FF″, bis sie

Digitized by Google

die verlängerten Linien in B″, D″, E″, F″ schneiden, so gibt die Verbindung dieser Punkte die vortheilhafteste Krümmung der Daumen zur Hebung der Last.

§. 177.

155ste Aufgabe.

Die vortheilhafteste Gestalt der Hebedaumen an einer Welle zu bestimmen, wenn die Erhebungshöhe AF Fig. 191. in die Verlängerung des verticalen Halbmessers fällt, und sowohl letzterer als die Theilung für den Umfang der Welle gegeben ist.

Auflösung.

Man theile sowohl die Erhebungshöhe AF, als den Bogen der Theilung AF′, in eine gleiche Anzahl Theile AB = BD = DE ꝛc. und AB′ = B′D′ = D′E′ ꝛc., lege von C aus durch B′, D′, E′, F′ die verlängerten Halbmesser CB″, CD″, CE″, CF″; ziehe aus C die concentrischen Bogen BB″, DD″, EE″, FF″, bis selbige die Linien CB″, CD″ ꝛc. in B″, D″, E″, F″ schneiden, und verbinde letztere Punkte durch die krumme Linie AB″C″D″E″F″, welche in diesem Falle ein Theil einer archimedischen Spirallinie ist, indem ihre Construction mit §. 161. übereinstimmt.

§. 178.

156ste Aufgabe.

Eine Last soll, mittelst eines Daumens, von einem zwischen dem horizontalen und verticalen Halbmesser liegenden Punkte A der Welle, bis F, Fig. 192., dergestalt gehoben werden, daß selbige nicht plötzlich, sondern mit der hebenden Geschwindigkeit wieder herab sinkt.

Digitized by Google

Auflösung.

Aus C wird auf dem gegebenen Punkte A, der Durchmesser AA′ gezogen; und der Umfang der Welle als Theilriß, so wie die Hälfte desselben AF′A′ Fig. 192. als die Theilung des Daumens betrachtet.

Man halbire den Bogen AF′A′ in F′; betrachte AF′ als die gegebene Theilung der vorderen und F′A′ als die Theilung der hinteren Krümmung des Daumens und errichte in A die Erhebungslinie AF. Die übrige Construction des vorderen Theils AF″f″, ist für die Theilung AF′, nach Anleitung des 176. §. zu verrichten.

Um die krumme Linie des hinteren Theils vom Daumen F″E″D″B″A′ zu bestimmen, zerlege man den Theilungsbogen F′A′ in so viel gleiche Theile, als die Erhebungshöhe AF erhalten hat; trage Ab aus B′ nach b; Ad aus D′ nach d′; Ae aus E′ nach e′; Af aus F′ nach f′; ziehe durch die gefundenen Punkte b′, d′, e′, f′ die Linien CB″, CD″, CE″, CF″, beschreibe aus C durch B, D, E, F, die Bogen BB″, DD″, EE″, FF″, bis sie obige verlängerte Halbmesser in B″, D″, E″ und F″ schneiden und verbinde letztere Punkte mittelst der krummen Linie A′B″D″E″F″.

Vermöge dieser Construction des Hebedaumens, wird die successiv herabgesunkene Last so lange in Ruhe verbleiben, bis der Bogen ANA′ unter AF hinweggewälzt ist. Soll die Last aber, nachdem sie allmählig herabgesunken ist, sogleich wieder mit derselben Geschwindigkeit gehoben werden, so dient zu Entwerfung des Daumens die Anleitung folgender Aufgabe.

§. 179.

157ste Aufgabe.

Die Gestalt eines Hebedaumens an einer Welle zu bestimmen, wenn der ganze Umfang derselben zur Theilung angenommen worden

und die Erhebungshöhe AF Fig. 193. in die Verlängerung des verticalen Halbmessers fällt.

Auflösung.

Die Erhebungslinie AF und der halbe Umkreis der Welle ist in eine Anzahl gleicher Theile, (hier in 4 Theile) zu theilen; ferner sind von C, durch B′, D′, E′, F′ verlängerte Halbmesser zu ziehen und aus B, D, E, F die concentrischen Kreise zu beschreiben, bis selbige die verlängerten Halbmesser in B″, D″, E″ und F″ schneiden und letztere Punkte durch eine krumme Linie AB″D″E″F″ u. s. w. zu verbinden.

Anhang

einiger Aufgaben, welche im Fache der Tischler, Fournierer und anderer Gewerken vorkommen können.

§. 180.

158ste Aufgabe.

Zu einer gegebenen Sehne NO Fig. 195. und der in ihrer Mitte errichteten Höhe MA einen Bogen zu construiren, welcher einer paraboli schen Linie sehr nahe kommt.

Auflösung.

Man theile die halbe Länge der Sehne MN in 10 gleiche Theile; mache die in ihrer Mitte errichtete Höhe MA, 2 solchen Theilen gleich, und beschreibe mit letzterer einen Quadranten CA, welcher ebenfalls in 10 gleiche Theile getheilt wird. Aus jedem Theilungspunkte 9, 8, 7 ꝛc. der Linie NM, ziehe man Parallelen mit MA, so wie aus den Theilungspunkten 9, 8, 7 ꝛc. des Quadran-

Digitized by Google

ten AC, Parallelen mit MN, und verbinde die Durchschnittspunkte a, b, c, d ꝛc. der in der Ordnung folgenden Parallelen durch die krumme Linie NPA. Dasselbe Verfahren wird auch auf der entgegengesetzten Hälfte angewendet, welche hier nicht vorhanden ist.

§. 181.

159ste Aufgabe.

Zu einer gegebenen Sehne NO und der in ihrer Mitte errichteten Höhe MA einen Bogen zu ziehen, welcher dem eines Kreises sehr nahe kommt.

Auflösung.

Das Verhältniß der halben Sehne MO und der Höhe AM bleibt wie in vorhergehender Aufgabe. Man beschreibe in Fig. 195. mit der Höhe MA, den Quadranten AL; ziehe die Sehne AL und theile sie in 10 gleiche Theile. Aus letzteren Theilungspunkten errichte man, bis zum Kreisbogen, die Perpendicularen 1 a; 2 b; 3 c ꝛc.; ziehe sodann die Linie AO; theile letztere ebenfalls in 10 gleiche Theile und lege durch die Theilungspunkte a', b', c', d' ꝛc. unbegrenzte Parallelen mit MA, so wie aus den Theilungspunkten der Sehne AL, nämlich aus 1; 2; 3; 4 ꝛc. mit MO, die Parallelen 1 a'; 2 b'; 3 c' ꝛc.

Nun trage man aus a', b', c', d' ꝛc. die auf AL errichteten Perpendicularen 1 a; 2 b; 3 c ꝛc. in ihrer Folge aufwärts aus a' nach 1; aus b' nach 2; aus c' nach 3 u. s. w. und verbinde die erhaltenen Punkte mittelst der krummen Linie AQO.

§. 182.

160ste Aufgabe.

Einen Körper in Gestalt einer eiförmigen Linie ACB Fig. 197. zu fournieren oder zu überziehen.

Digitized by Google

Auflösung.

Nachdem das Profil ACB des Körpers auf einer Ebene verzeichnet worden ist, verbinde man die wagerecht liegenden Punkte A und B durch eine Linie und ziehe aus deren Mitte D die Axe DC; theile letztere in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (hier in 8) und ziehe durch die Theilungspunkte a, b, c, d ꝛc. Parallelen, welche die Axe rechtwinklich schneiden. Alsdann beschreibe man über jede derselben einen Halbkreis, z. B. 1,1,1; 2,2,2; 3,3,3 ꝛc. Den letzten Theil gC theile man, der größeren Genauigkeit wegen, nochmals in zwei gleiche Theile, wodurch zuletzt der halbe Kreis 9,9,9 entstehet.

Soll nun z. B. der Körper ACB mit 14 einzelnen gleich großen Streifen belegt werden, so theile man jeden der beschriebenen Halbkreise in halb so viel (hier in 7) gleiche Theile; ziehe in Fig. 196. die Linie dc; nehme die Entfernung C9 Fig. 197. in den Zirkel; trage selbige in Fig. 196. aus c nach z′; auf gleiche Weise wird die Entfernung 9;8 Fig. 197. aus z′ nach v′ Fig. 196. u. s. w. gesetzt und beschreibe in letzterer Figur aus c Bogen, durch die aufgetragenen Punkte.

Um endlich die Länge der in Fig. 196. bis jetzt noch unbegrenzten Bogen zu bestimmen, nehme man in Fig. 197. die Entfernung des zunächst liegenden Theilungspunktes von der Axe, z. B. ix, in den Zirkel, und trage selbige in Fig. 196. aus z′ nach 9 und 9; eben so vy aus Fig. 197. und trage sie in Fig. 196. aus v′ nach 8 und 8 ꝛc., so geben die auf beiden Seiten liegenden Punkte 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc., durch krumme Linien verbunden, die Form des vierzehnten Theils vom Ueberzuge des Körpers.

§. 183.

161ste Aufgabe.

Einen Körper EGF Fig. 199., dessen Oberfläche theils erhaben, theils ausgehöhlt er-

Digitized by Google

scheint, mittelst aneinandergesetzter Streifen zu überziehen.

Auflösung.

Das aufgetragene Profil des Körpers sey EFG. Man ziehe durch den Mittelpunkt der oberen und unteren Linie H und G, die Axe HG; theile sie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile; ziehe durch die Theilungspunkte Parallelen, welche die Axe rechtwinklich schneiden und beschreibe über jede derselben einen halben Kreis, der, wie in vorhergehender Aufgabe, in 7 Theile getheilt werden kann.

Man ziehe nunmehr in Fig. 198. die Linie hg; nehme die Entfernung 1;2 Fig. 199. in den Zirkel und trage selbige in Fig. 198. aus g nach i. Auf dieselbe Weise nehme man in Fig. 199. die Entfernung 2,3; 3,4; 4,5 ꝛc. in den Zirkel und setze sie in Fig. 198. aus i nach k, aus k nach l, aus l nach m u. s. w. und beschreibe aus g, Bogen durch letztere Punkte.

Hierauf wird das halbe Siebentel ca vom Kreise 1,1 Fig. 199. aus g nach 1 und 1 Fig. 198., eben so das halbe Siebentel bd des Kreises 2,2 Fig. 199., aus i nach 2 und 2 Fig. 198. ꝛc. ꝛc. getragen und die dadurch bestimmten Punkte 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. in letzterer Figur, auf beiden Seiten mittelst krummer Linien verbunden, so erhält man die Chablone, für den 14ten Theil der Außenfläche des Körpers.

Digitized by Google

Bei Leopold Voß sind ferner erschienen:

Fischer, Prof. G. A., Lehrbuch der ebenen und sphäri
Trigonometrie für das Geschäftsleben, als Anwend
Lehre und Ergänzung der Lehmannschen Anleitung
zweckmäßigen Gebrauche des Meßtisches ꝛc. für a
dehntere topographische Vermessungen. Mit 10 Ku
tafeln. gr. 8. 1819. 1 Thlr. 20

— — — Anfangsgründe der Hydrostatik und Hydr
zum Selbstunterricht für angehende Architekten und
nächst als Lehrbuch für den Unterricht in der Kö
Sächs. Bauschule. Mit 3 Kupfertafeln. gr. 8. 1
1 Thlr. 8

— — — Die vorzüglichsten Elementar-Aufgaben
den zweckmäßigen Gebrauch des Meßtisches, so wie
das Aufnehmen ohne künstliche Instrumente, nach
mann'schen Lehrsätzen; nebst einer kurzen Anleitung
Nivelliren. Mit 6 Kupfertafeln. gr. 8. 1824. 18

1 JY 61

Digitized by Google

Fig. 5

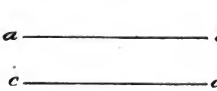


Fig. 6

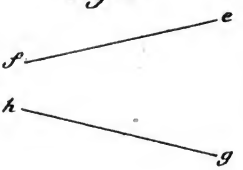


Fig. 13

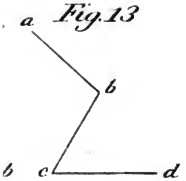


Fig. 14

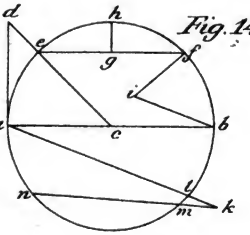


Fig. 19

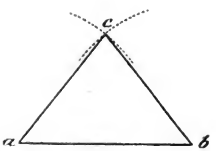


Fig. 20

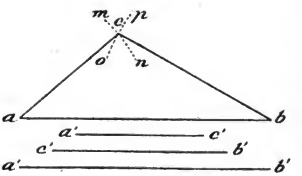


Fig. 25

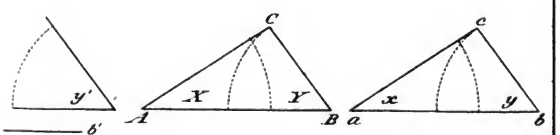
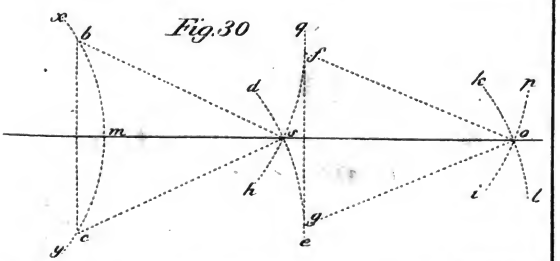


Fig. 30



F.C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 36

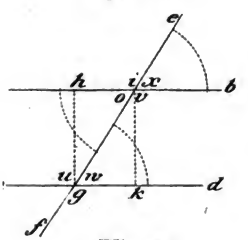


Fig. 37

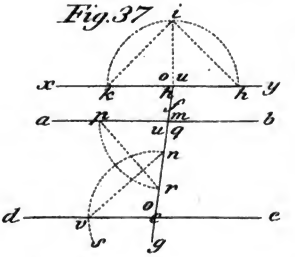
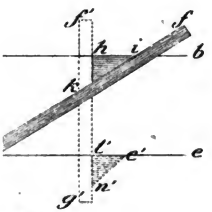


Fig. 42



47

Fig. 43

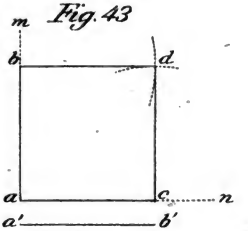


Fig. 48

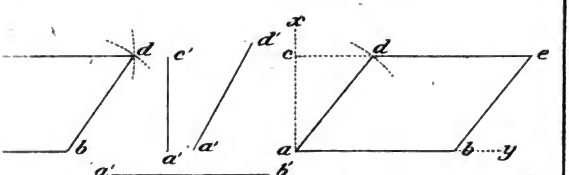


Fig. 52

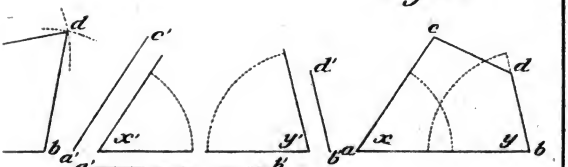


Fig. 57

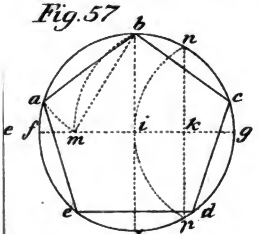
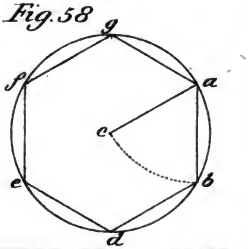


Fig. 58



I. C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 64

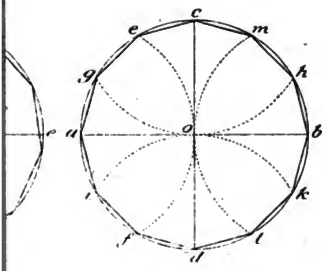


Fig. 66

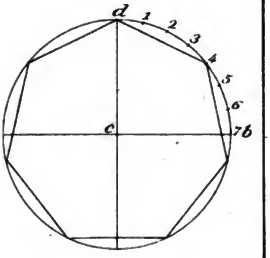


Fig. 71

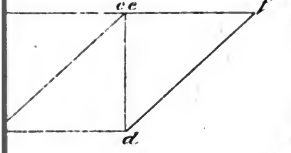


Fig. 72

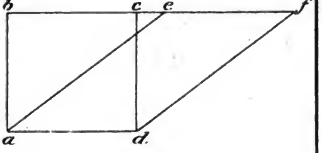
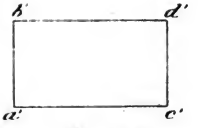


Fig. 77



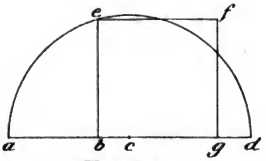


Fig. 83

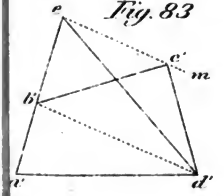


Fig. 84

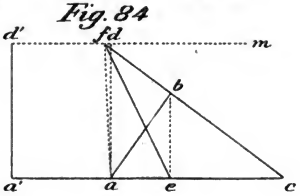


Fig. 88

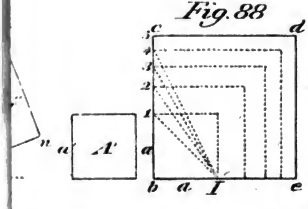
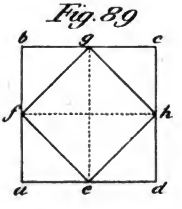


Fig. 89



I. C. Bohme sc.

Digitized by Google

Fig. 64

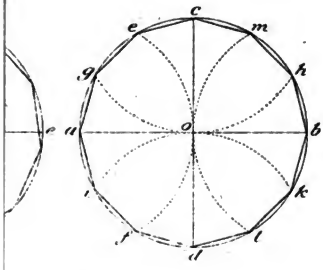


Fig. 66

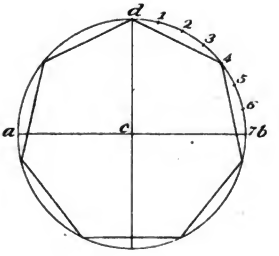


Fig. 71

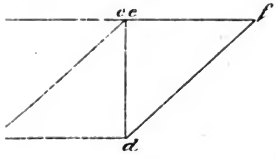


Fig. 72

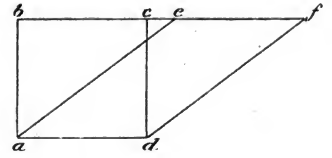
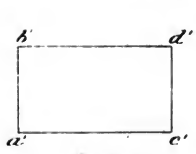


Fig. 77



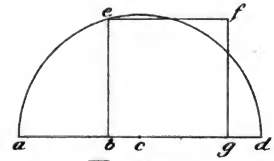


Fig. 83

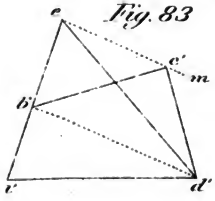


Fig. 84

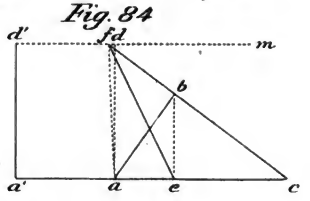


Fig. 88

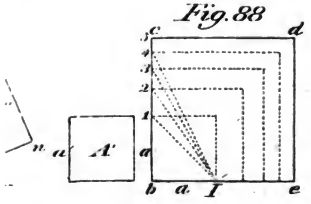
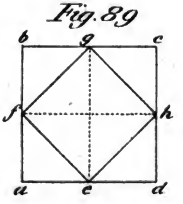


Fig. 89



J.C.Bohme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

:94

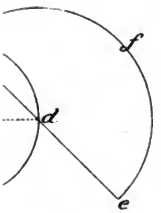


Fig. 95

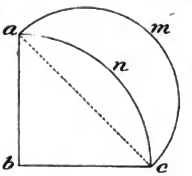


Fig. 96

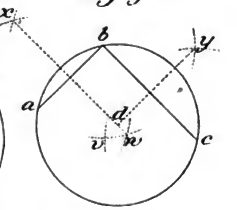


Fig. 102

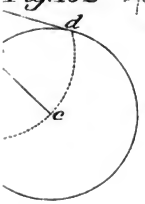


Fig. 103

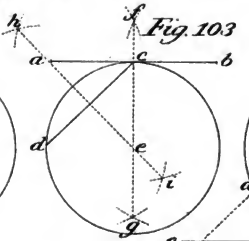


Fig. 104

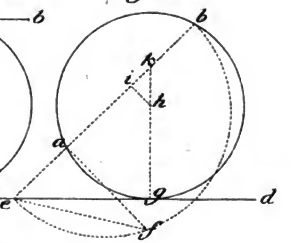


Fig. 108

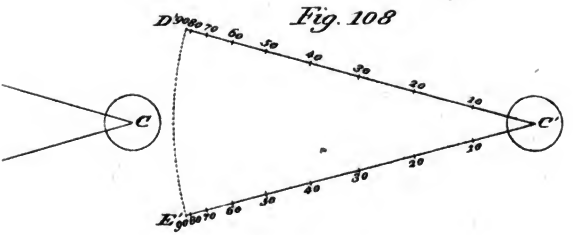


Fig. 111

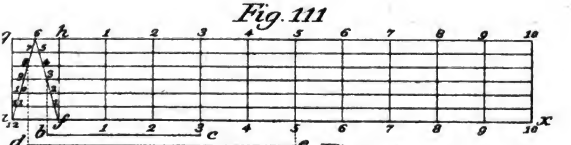


Fig. 114

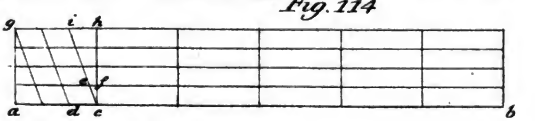
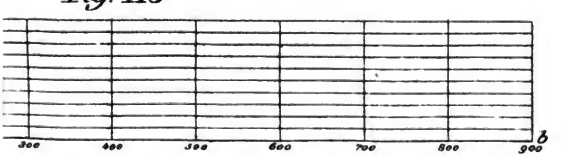


Fig. 113



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 118

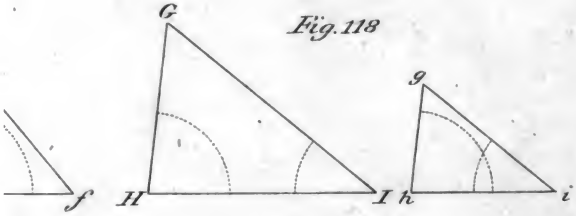


Fig. 123

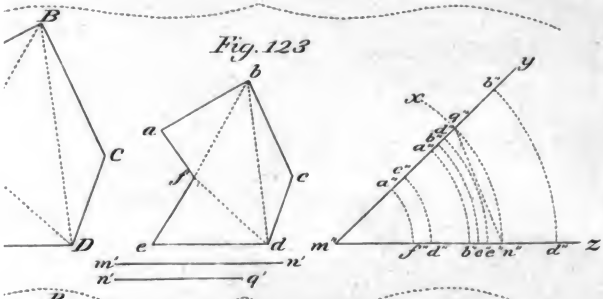


Fig. 127

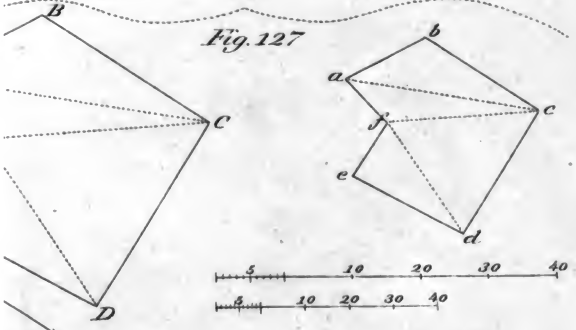
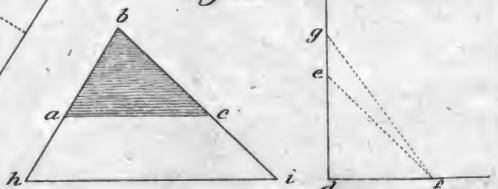
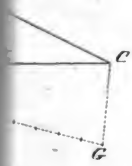


Fig. 130



J. C. Böhme sc.

Digitized by Google



2.

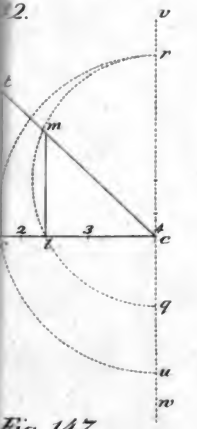
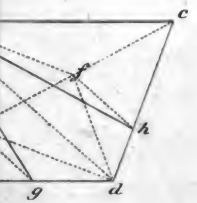


Fig. 147.



I.C.Bohne sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 151

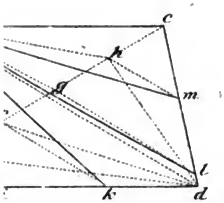
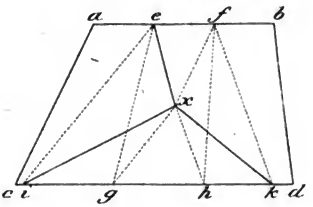
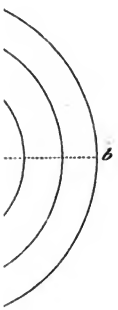


Fig. 152





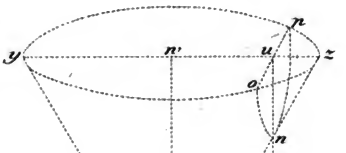


Fig. 156

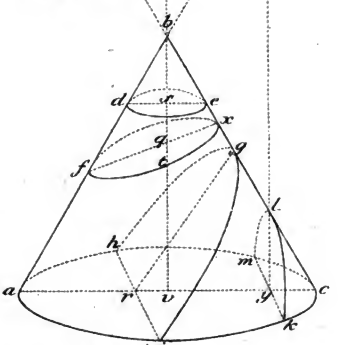
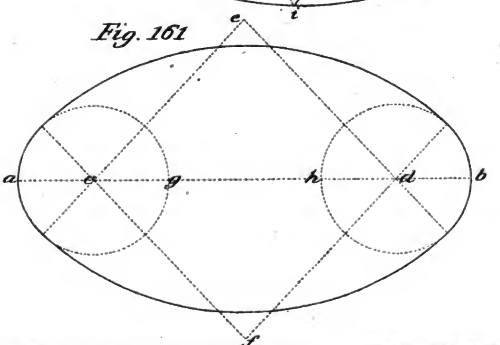


Fig. 161

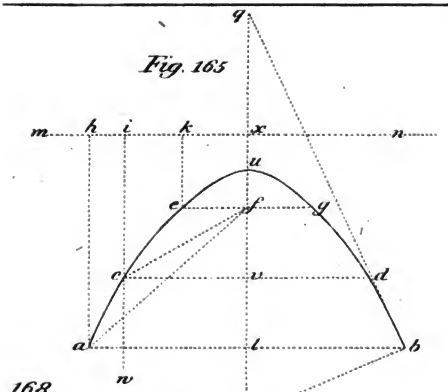


J. C. Böhme sc.

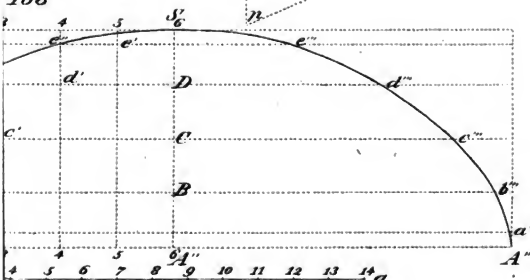
Digitized by Google

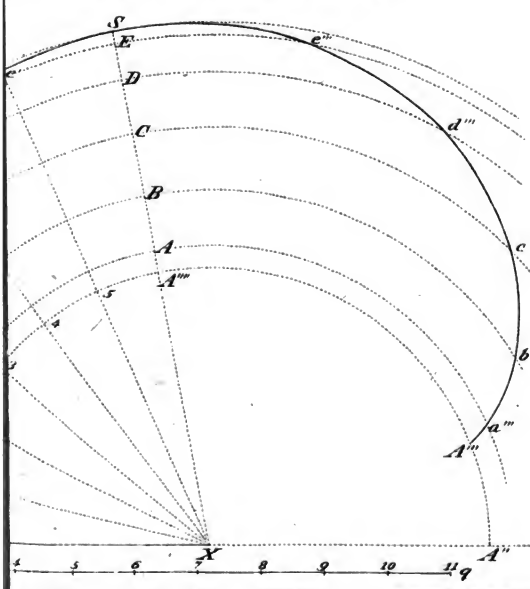
Digitized by Google

Fig. 165



168





I. C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Tab. IX.

Fig. 172

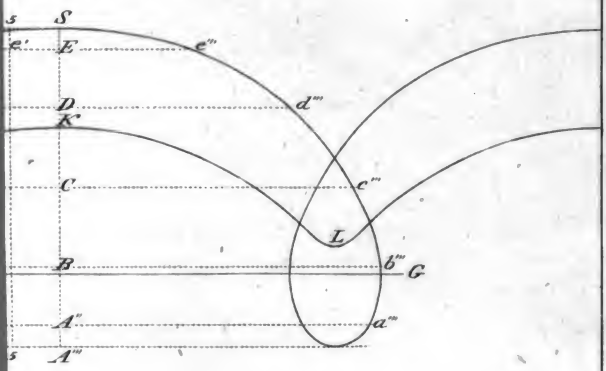
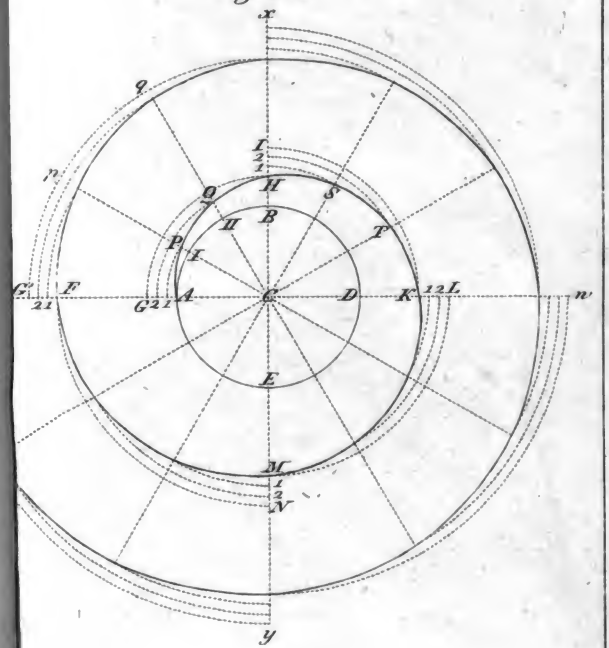


Fig. 176



I. C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 64

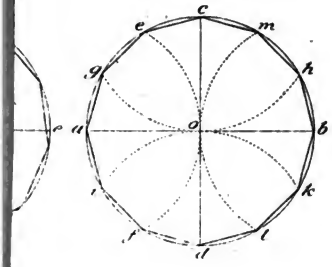


Fig. 66

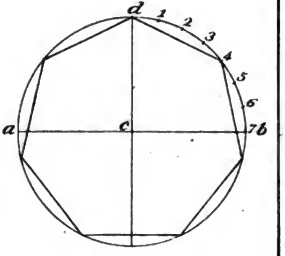


Fig. 71

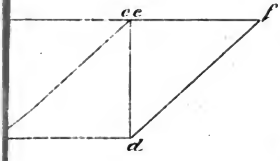


Fig. 72

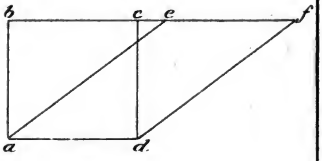


Fig. 77

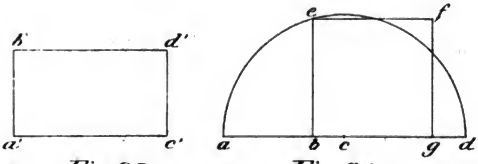


Fig. 83

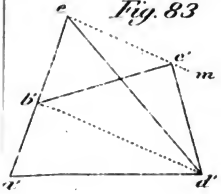


Fig. 84

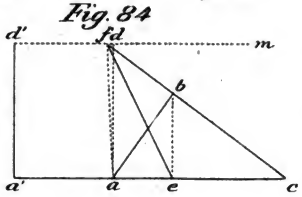


Fig. 88

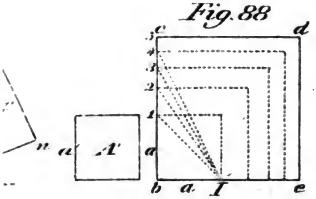
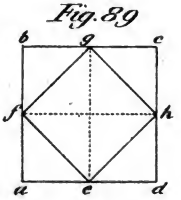


Fig. 89



I. C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

.94

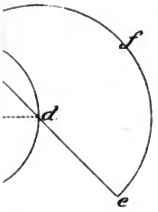


Fig. 95

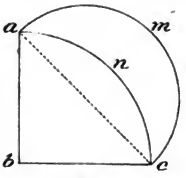


Fig. 96

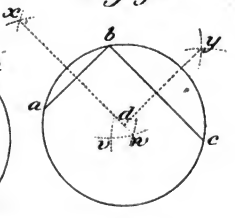


Fig. 102

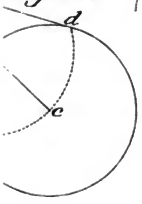


Fig. 103

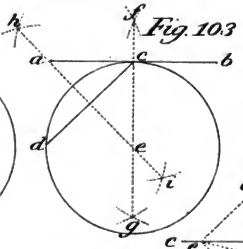


Fig. 104

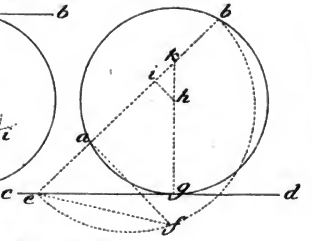


Fig. 108

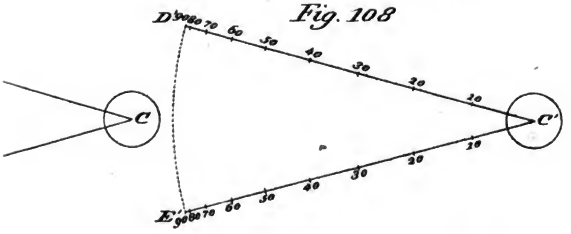


Fig. 111

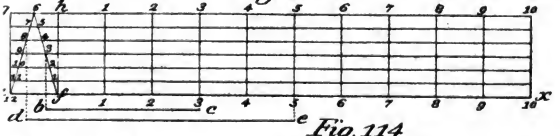


Fig. 114

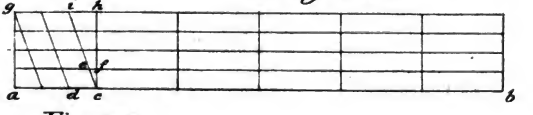
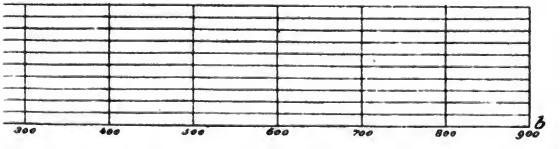


Fig. 113



J. C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 118

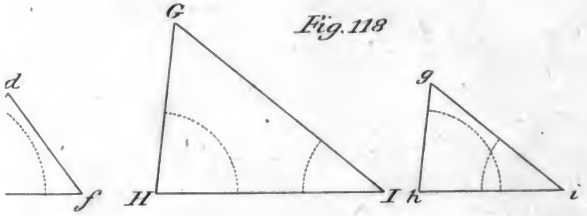


Fig. 123

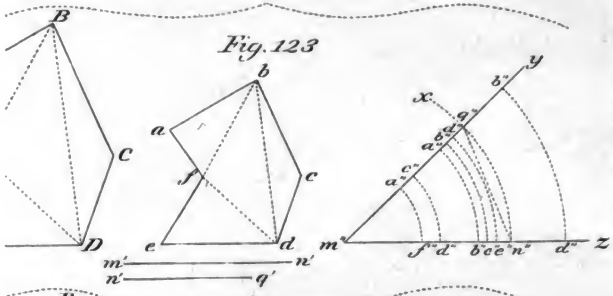


Fig. 127

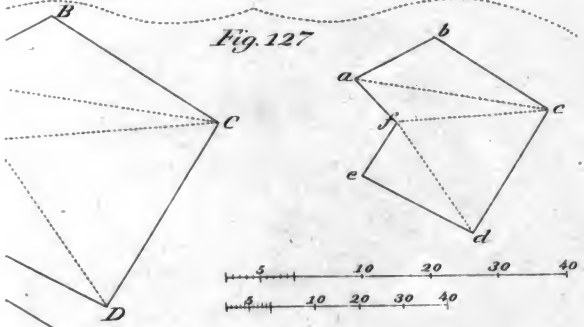
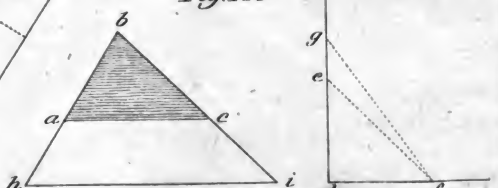


Fig. 130

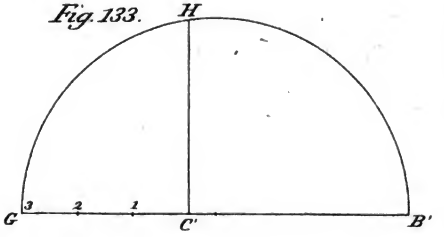


J. C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 133.



37.

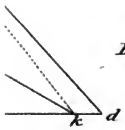
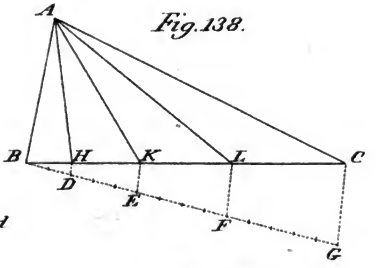


Fig. 138.



1.

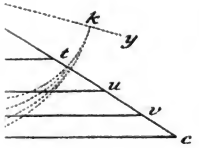


Fig. 142.

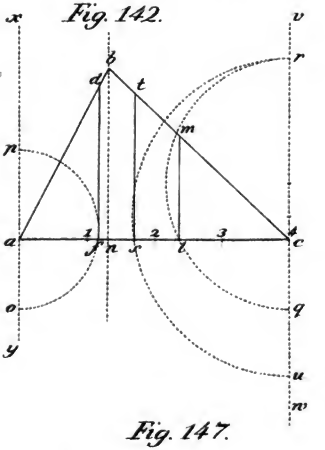


Fig. 146.

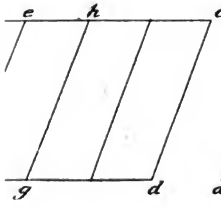
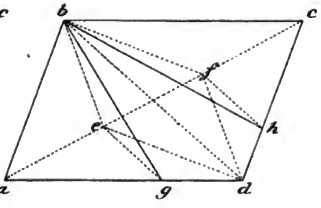


Fig. 147.



T.C.Bohne sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 151

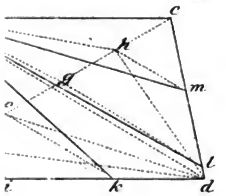
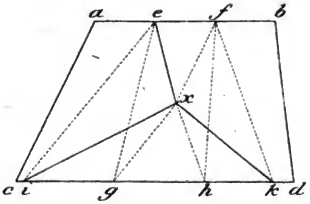


Fig. 152



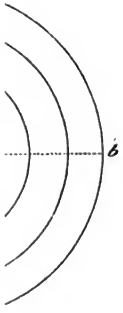


Fig. 156

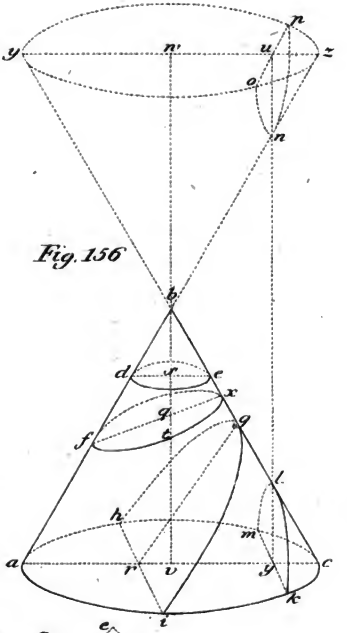
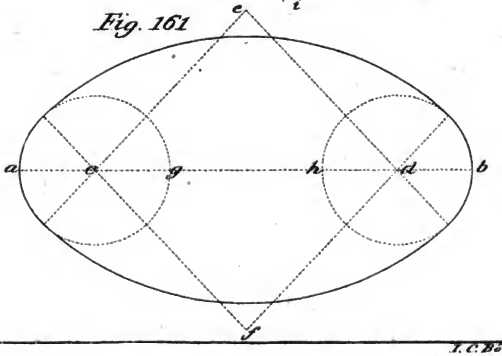


Fig. 161

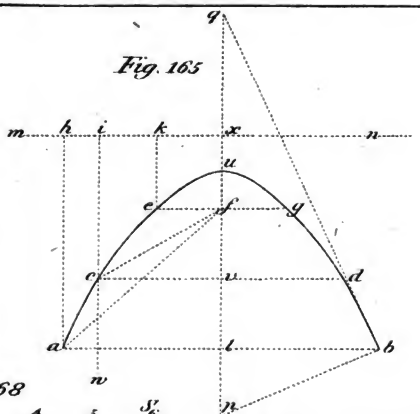


J. C. Böhme sc.

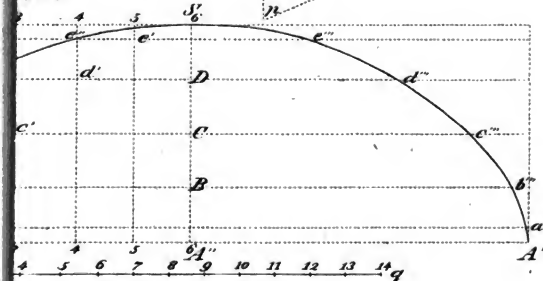
Digitized by Google

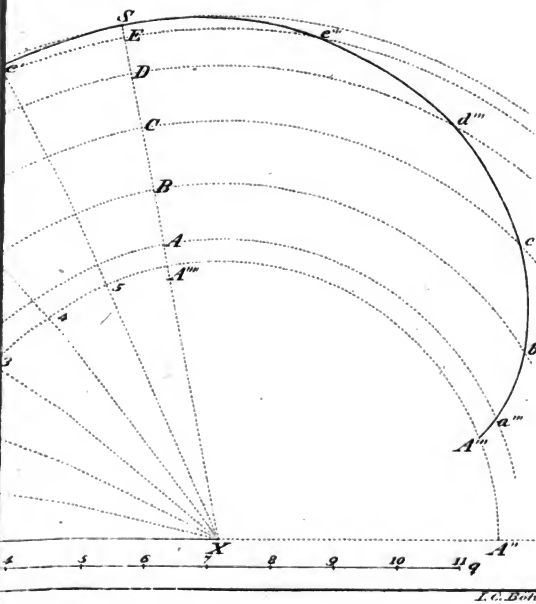
Digitized by Google

Fig. 165



168





I. C. Böhme sc.

Digitized by Google

Fig. 172

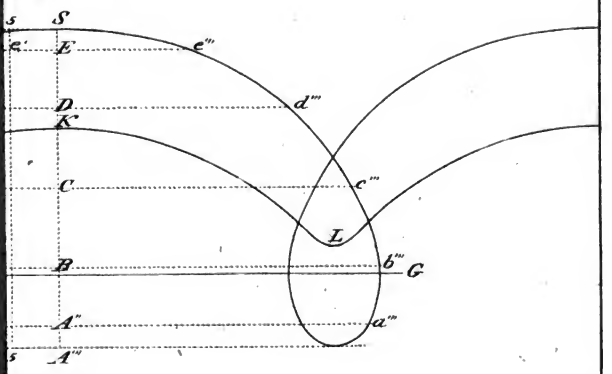
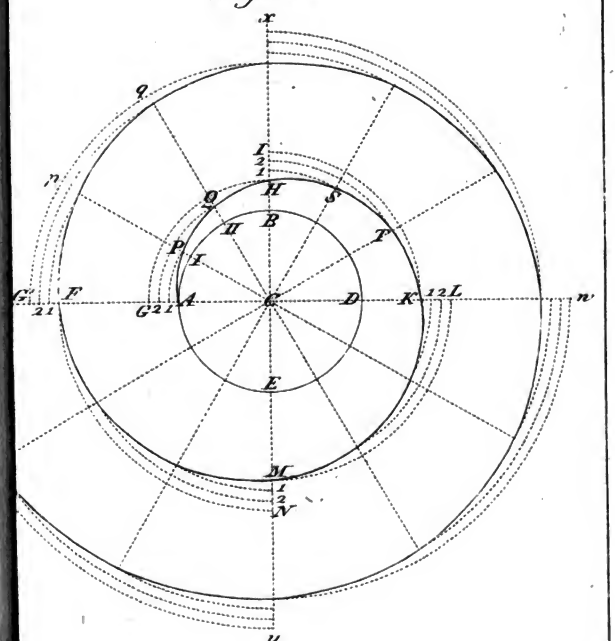


Fig. 176

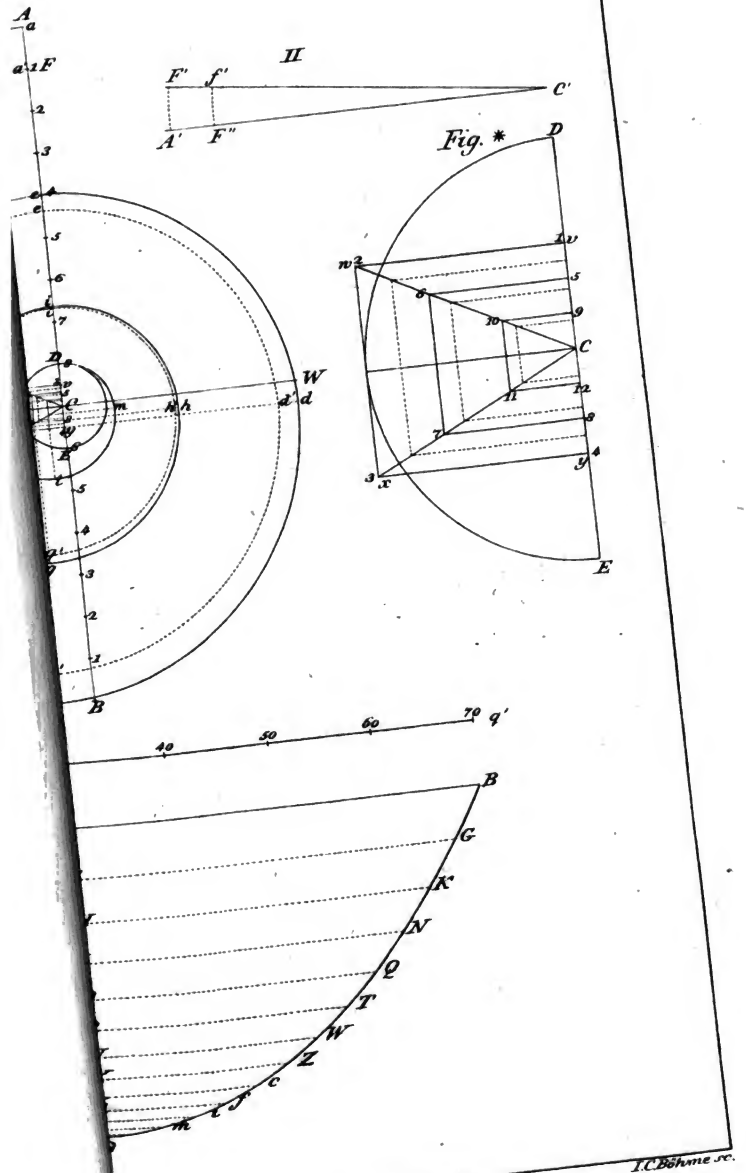


I. C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

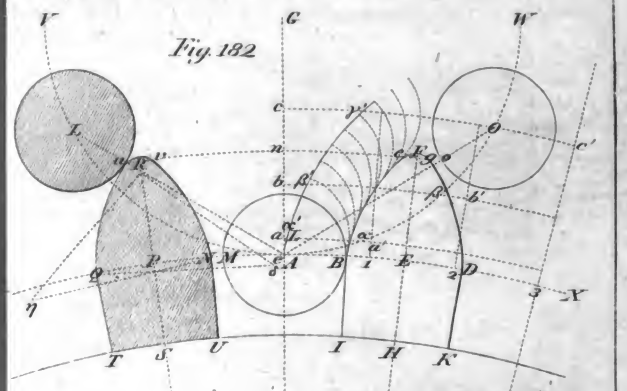
Tab. X



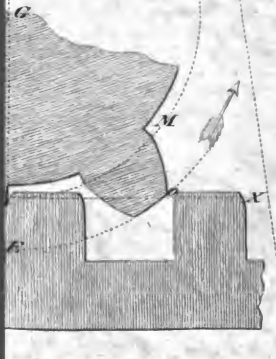
Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 182



185



I. C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 188

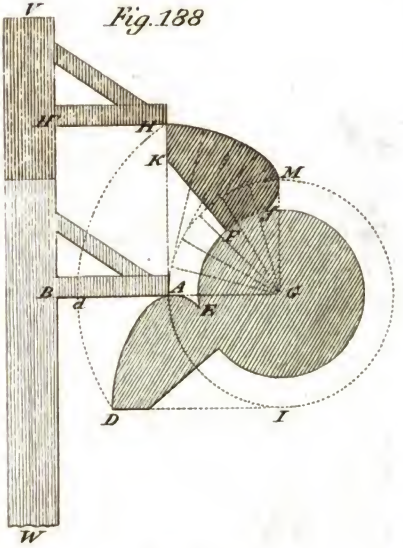
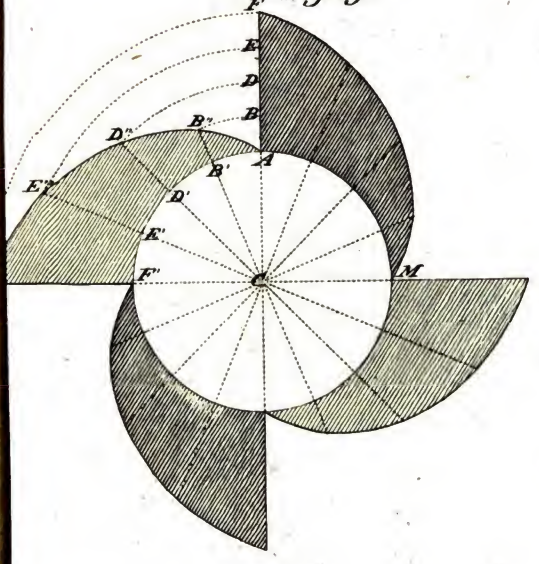


Fig. 191

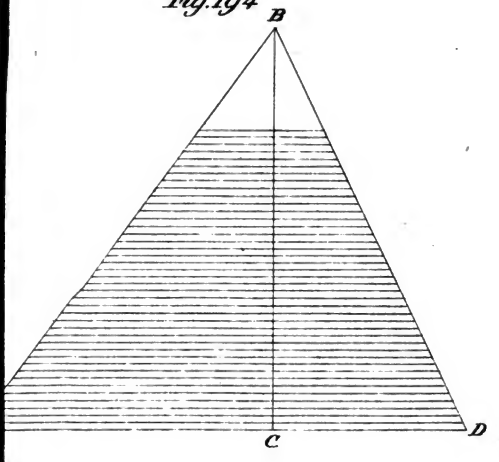


I.C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 194



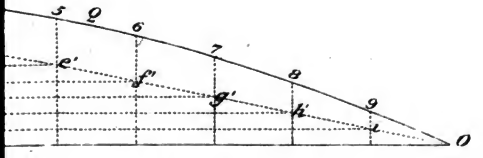
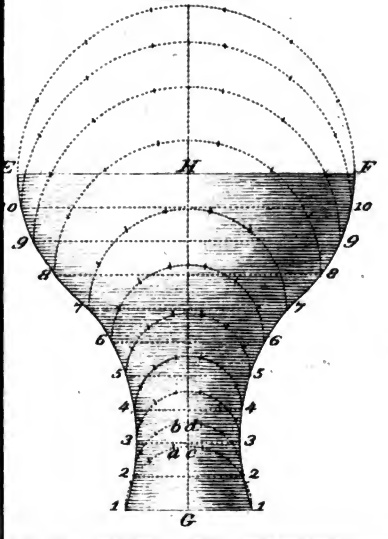
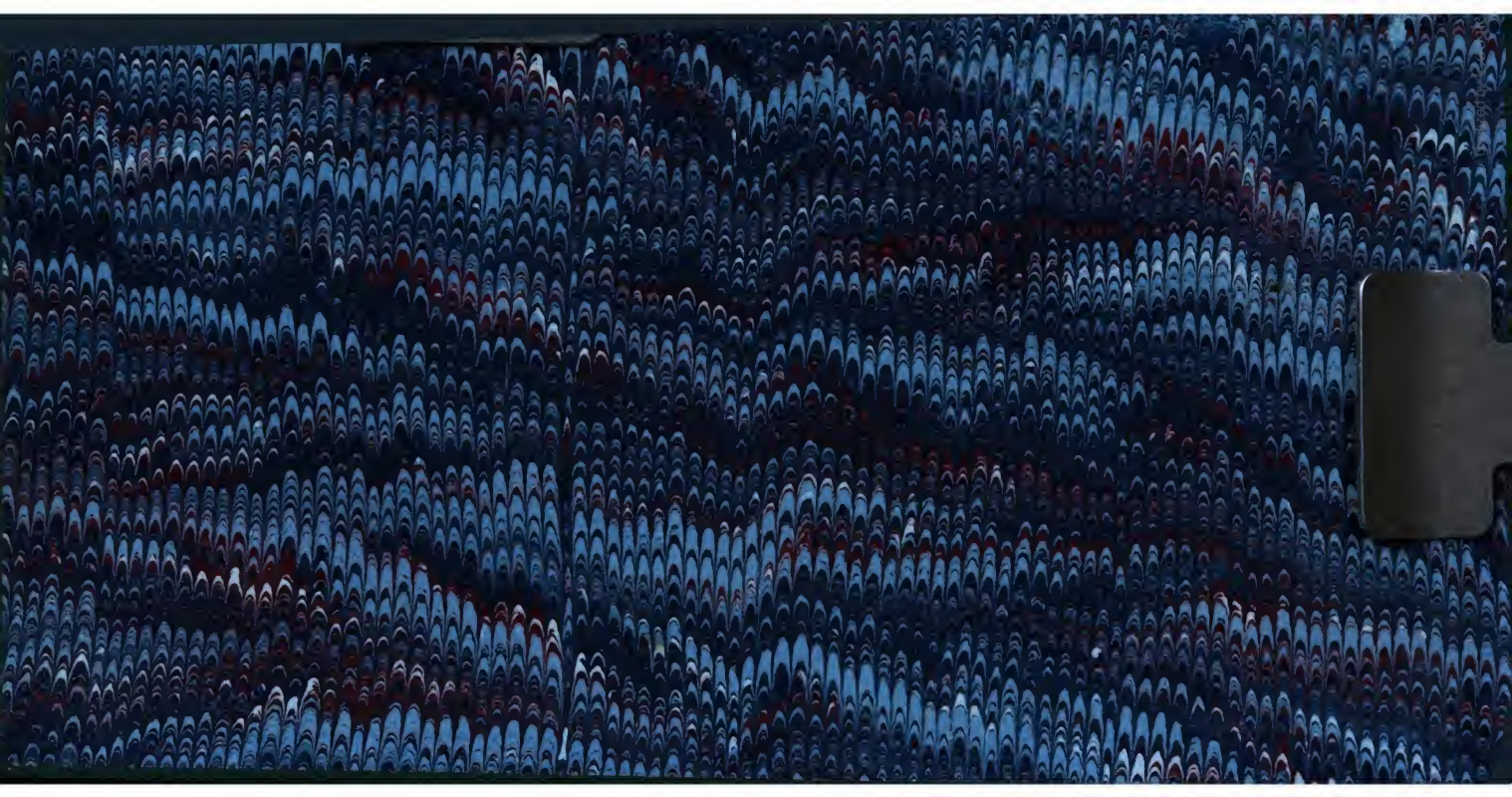


Fig. 199



I. C. Böhme sc.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google